

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016**

**FORMUŁA OD 2015  
(„NOWA MATURA”)**

**MATEMATYKA  
POZIOM ROZSZERZONY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ  
ARKUSZ MMA-P1**

**CZERWIEC 2016**

## Klucz punktowania zadań zamkniętych

|        |   |   |   |   |   |
|--------|---|---|---|---|---|
| Nr zad | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Odp.   | A | D | B | A | C |

## Zadania kodowane

Zadanie 6.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 9 | 2 | 3 |
|---|---|---|

Zadanie 7.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 3 | 1 | 4 |
|---|---|---|

## Zadania otwarte

**Zadanie 8. (0–4)**

Wykaż, że dla  $a, b, c, d > 0$  prawdziwa jest nierówność  $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$ .

**Rozwiązanie**

Obie strony nierówności  $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$  możemy podnieść do kwadratu, bo przyjmują wyłącznie wartości dodatnie. Otrzymujemy:

$$(a+b)(c+d) \geq ac + bd + 2\sqrt{abcd}$$

$$ac + ad + bc + bd \geq ac + bd + 2\sqrt{abcd}$$

$$ad + bc \geq 2\sqrt{abcd}$$

$$(\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 \geq 0.$$

Nierówność  $(\sqrt{ad} - \sqrt{bc})^2 \geq 0$  jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych  $a, b, c, d > 0$ , co kończy dowód.

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający zauważy, że obie strony nierówności  $\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$  są dodatnie i można nierówność obustronnie podnieść do kwadratu.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający zapisze nierówność w postaci:  $(a+b)(c+d) \geq ac + bd + 2\sqrt{abcd}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający zapisze nierówność w postaci:  $ad + bc \geq 2\sqrt{abcd}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający przeprowadzi pełny dowód.

*Uwaga:*

Jeżeli zdający przy podnoszeniu prawej strony nierówności do kwadratu otrzymuje wyrażenie  $ac + bd$ , to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 9. (0–4)**

Rozwiąż nierówność  $|x^2 - 3x + 2| \geq |x - 1|$ .

**I sposób rozwiązania**

Zauważmy, że nierówność możemy zapisać w postaci równoważnej kolejno jako:

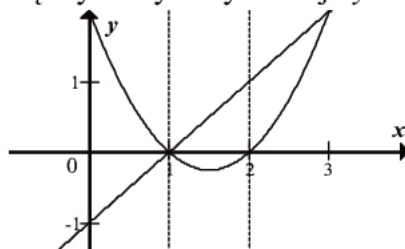
$$|x - 1| \cdot |x - 2| \geq |x - 1|,$$

$$|x - 1| \cdot (|x - 2| - 1) \geq 0.$$

Ponieważ dla dowolnej liczby rzeczywistej  $x$  prawdziwa jest nierówność  $|x - 1| \geq 0$ , więc nierówność  $|x - 1| \cdot (|x - 2| - 1) \geq 0$  jest równoważna nierówności  $|x - 2| - 1 \geq 0$ , czyli  $|x - 2| \geq 1$ . Z geometrycznej interpretacji wartości bezwzględnej, otrzymujemy  $x \in (-\infty, 1) \cup \langle 3, +\infty)$ .

**II sposób rozwiązania**

Naszkicujmy w układzie współrzędnych wykresy funkcji  $y = x^2 - 3x + 2$  oraz  $y = x - 1$ .



Rozważmy nierówność kolejno w przedziałach  $(-\infty, 1)$ ,  $\langle 1, 2)$  oraz  $\langle 2, +\infty)$ .

Gdy  $x \in (-\infty, 1)$ , to wtedy  $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$  oraz  $|x - 1| = -(x - 1)$ , a nierówność przyjmuje postać

$$x^2 - 3x + 2 \geq -x + 1,$$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0,$$

$$(x - 1)^2 \geq 0.$$

Nierówność ta jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ , zatem każda liczba  $x \in (-\infty, 1)$  jest rozwiązaniem nierówności.

Gdy  $x \in \langle 1, 2)$ , to wtedy  $|x^2 - 3x + 2| = -(x^2 - 3x + 2)$  oraz  $|x - 1| = x - 1$ , a nierówność przyjmuje postać

$$-x^2 + 3x - 2 \geq x - 1,$$

$$x^2 - 2x + 1 \leq 0,$$

$$(x - 1)^2 \leq 0.$$

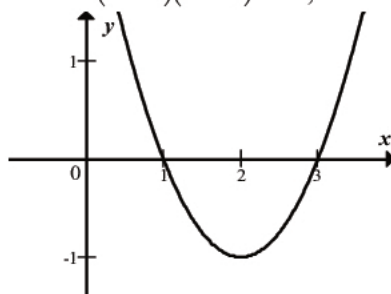
Nierówność ta jest prawdziwa tylko dla  $x = 1$ . Zatem w przedziale  $\langle 1, 2 \rangle$  tylko liczba  $x = 1$  jest rozwiązaniem nierówności.

Gdy  $x \in \langle 2, +\infty \rangle$ , to wtedy  $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$  oraz  $|x - 1| = x - 1$ , a nierówność przyjmuje postać

$$x^2 - 3x + 2 \geq x - 1,$$

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0,$$

$$(x - 1)(x - 3) \geq 0,$$



$$x \in (-\infty, 1) \cup \langle 3, +\infty \rangle.$$

Zatem w przedziale  $\langle 2, +\infty \rangle$  rozwiązaniem nierówności jest każda liczba  $x \in \langle 3, +\infty \rangle$ .

W rezultacie rozwiązaniem nierówności  $|x^2 - 3x + 2| \geq |x - 1|$  jest każda liczba

$$x \in (-\infty, 1) \cup \langle 3, +\infty \rangle.$$

### Schemat punktowania I i II sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny do całkowitego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

gdy

- zapisze, że  $|x - 1| \cdot |x - 2| = |x^2 - 3x + 2|$

albo

- zapisze, że nierówność należy rozważyć w każdym z przedziałów  $(-\infty, 1)$ ,  $\langle 1, 2 \rangle$ ,  $\langle 2, +\infty \rangle$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

gdy

- zapisze nierówność w postaci iloczynowej:  $|x - 1| \cdot (|x - 2| - 1) \geq 0$

albo

- zapisze poprawnie nierówność w każdym z przedziałów:  $(-\infty, 1)$ ,  $\langle 1, 2 \rangle$ ,  $\langle 2, +\infty \rangle$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

gdy

- zapisze, że nierówność  $|x^2 - 3x + 2| \geq |x - 1|$  jest równoważna nierówności  $|x - 2| \geq 1$

albo

- zapisze poprawnie nierówność w każdym z przedziałów  $(-\infty, 1)$ ,  $\langle 1, 2 \rangle$ ,  $\langle 2, +\infty \rangle$  i rozwiąże poprawnie tę nierówność w jednym lub dwóch spośród ww. przedziałów.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

gdy zapisze rozwiązanie nierówności, np.:  $x \in (-\infty, 1) \cup \langle 3, +\infty \rangle$ .



*Uwagi:*

1. Jeżeli zdający rozważy wszystkie przedziały otwarte, tj.  $(-\infty, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, +\infty)$ , to otrzymuje **o 1 punkt mniej**, niż wynika to z osiągniętego przez niego etapu rozwiązania zadania.
2. Jeżeli zdający podzieli obie strony nierówności  $|x-1| \cdot (|x-2|-1) \geq 0$  przez  $|x-1|$ , nie zakładając, że  $|x-1| > 0$  i konsekwentnie rozwiąże nierówność do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

### III sposób rozwiązania

Ponieważ obie strony nierówności  $|x^2 - 3x + 2| \geq |x-1|$  są nieujemne, więc podnosząc je do kwadratu otrzymujemy nierówność równoważną

$$\begin{aligned}(x^2 - 3x + 2)^2 &\geq (x-1)^2, \\ x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 &\geq x^2 - 2x + 1, \\ x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3 &\geq 0.\end{aligned}$$

Zauważmy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu  $W(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$ , gdyż  $1^4 - 6 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 3 = 0$ . Zatem wielomian  $W$  jest podzielny przez dwumian  $x-1$ . Stosując algorytm Hornera, otrzymujemy

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -6 & 12 & -10 & 3 \\ 1 & 1 & -5 & 7 & -3 & 0 \end{array}$$

Zatem  $W(x) = (x-1)(x^3 - 5x^2 + 7x - 3)$ . Liczba 1 jest też pierwiastkiem wielomianu  $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ , gdyż  $1^3 - 5 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 3 = 0$ . Dzieląc ten wielomian przez  $x-1$ , otrzymujemy

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

Zatem  $W(x) = (x-1)^2(x^2 - 4x + 3)$ . Trójmian kwadratowy  $x^2 - 4x + 3$  ma dwa pierwiastki  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ , więc  $W(x) = (x-1)^3(x-3)$ . Ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  prawdziwa jest nierówność  $(x-1)^2 \geq 0$ , więc nierówność  $W(x) \geq 0$  jest równoważna nierówności kwadratowej

$$(x-1)(x-3) \geq 0,$$

której rozwiązaniem jest każda liczba  $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ .

*Uwaga:*

Nierówność  $(x^2 - 3x + 2)^2 \geq (x-1)^2$  możemy też przekształcić równoważnie

$$\begin{aligned}(x^2 - 3x + 2)^2 - (x-1)^2 &\geq 0, \\ (x^2 - 3x + 2 - x + 1)(x^2 - 3x + 2 + x - 1) &\geq 0, \\ (x^2 - 4x + 3)(x^2 - 2x + 1) &\geq 0, \\ (x-1)(x-3)(x-1)^2 &\geq 0,\end{aligned}$$

a dalej tak samo jak w III sposobie rozwiązania.

**Schemat punktowania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 p.**

Zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej  $(x^2 - 3x + 2)^2 \geq (x - 1)^2$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej

- $(x - 1)(x^3 - 5x^2 + 7x - 3) \geq 0$

albo

- $(x^2 - 3x + 2 - x + 1)(x^2 - 3x + 2 + x - 1) \geq 0$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający

- zapisze nierówność w postaci równoważnej  $(x - 1)^3 (x - 3) \geq 0$

albo

- wyznaczy wszystkie pierwiastki wielomianu  $W(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$  i naszkicuje wykres tego wielomianu (lub wykresy odpowiednich czynników tego wielomianu).

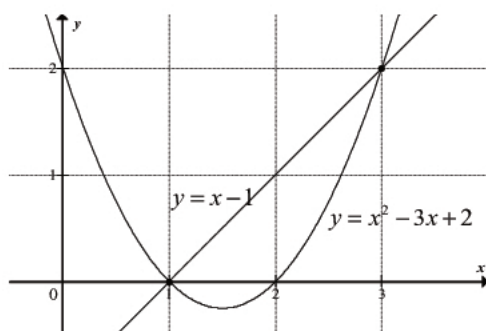
**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności:  $x \in (-\infty, 1) \cup \langle 3, +\infty)$ .

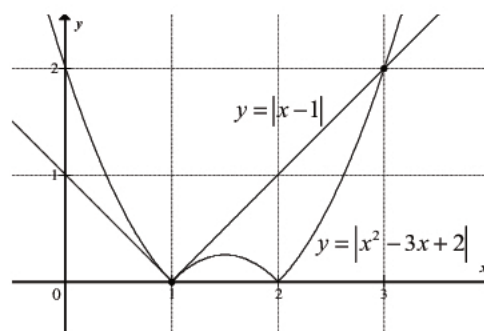
**IV sposób rozwiązania**

Naszkicujmy w układzie współrzędnych wykresy funkcji  $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$  oraz  $g(x) = |x - 1|$ , przekształcając odpowiednio parabolę o równaniu  $y = x^2 - 3x + 2$  oraz prostą o równaniu  $y = x - 1$ .

Ponieważ  $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ , więc parabola przecina oś  $Ox$  w punktach  $(1, 0)$  i  $(2, 0)$ , a jej wierzchołkiem jest punkt  $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ .



Rys. 1.



Rys. 2.

Wykresy funkcji  $f$  i  $g$  przecinają się tylko w dwóch punktach:  $(1,0)$ ,  $(3,2)$ . Wystarczy wykazać, że równanie  $|x^2 - 3x + 2| = |x - 1|$  ma tylko dwa rozwiązania. Równanie to jest równoważne alternatywie równań

$$\begin{aligned}x^2 - 3x + 2 &= x - 1 \text{ lub } x^2 - 3x + 2 = -x + 1, \\x^2 - 4x + 3 &= 0 \text{ lub } x^2 - 2x + 1 = 0, \\(x-1)(x-3) &= 0 \text{ lub } (x-1)^2 = 0.\end{aligned}$$

Stąd  $x=1$  lub  $x=3$ .

### **Schemat punktowania IV sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 p.**

Zdający narysuje w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji  $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$  i  $g(x) = |x - 1|$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający odczyta z rysunku zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) \geq g(x)$ :  $x \in (-\infty, 1) \cup \langle 3, +\infty)$ , ale nie uzasadni, że wykresy funkcji  $f$  i  $g$  mają tylko dwa punkty wspólne.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający odczyta z rysunku zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) \geq g(x)$ :  $x \in (-\infty, 1) \cup \langle 3, +\infty)$  oraz uzasadni, że wykresy funkcji  $f$  i  $g$  mają tylko dwa punkty wspólne.

*Uwagi:*

1. Akceptujemy przyjęcie bez uzasadnienia, że dla  $x > 2$  wykresy funkcji  $f$  i  $g$  przecinają się w jednym punkcie  $(3,2)$ . Wymagamy natomiast uzasadnienia, że dla  $x \leq 2$  wykresy tych funkcji mają tylko jeden punkt wspólny. Zdający może np. zauważyć, że prosta o równaniu  $y = x - 1$  jest styczna do paraboli o równaniu  $y = -x^2 + 3x - 2$  w punkcie  $(1,0)$  tej paraboli, gdyż pochodna funkcji kwadratowej  $h(x) = -x^2 + 3x - 2$  jest równa  $h'(x) = -2x + 3$ , a punkt  $(1,0)$  leży na prostej o równaniu  $y = x - 1$ , na wykresie funkcji  $h$  oraz  $h'(1) = -2 \cdot 1 + 3 = 1$ .
2. Jeżeli błędnie odczyta odciętą jednego z punktów wspólnych wykresów funkcji  $f$  i  $g$  i nie uzasadni, że wykresy tych funkcji mają tylko dwa punkty przecięcia, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

**Zadanie 10. (0–3)**

Dany jest ciąg  $(a_n)$  określony dla każdej liczby całkowitej  $n \geq 1$ , w którym  $a_4 = 4$  oraz dla każdej liczby  $n \geq 1$  prawdziwa jest równość  $a_{n+1} = a_n + n - 4$ . Oblicz pierwszy wyraz ciągu  $(a_n)$  i ustal, czy ciąg ten jest malejący.

**Rozwiązanie**

Ponieważ  $a_4 = 4$  i  $a_4 = a_3 + 3 - 4$ , więc  $a_3 = 5$ .

Analogicznie  $a_3 = a_2 + 2 - 4$ , więc  $a_2 = 7$  oraz  $a_2 = a_1 + 1 - 4$ , zatem  $a_1 = 10$ .

Ponieważ  $a_5 = a_4 + 4 - 4 = a_4$ , więc ciąg ten nie jest malejący.

*Uwaga:*

Możemy też zauważyć, że  $a_{n+1} - a_n = n - 4$ . Różnica ta jest ujemna tylko dla  $n < 4$ , a więc tylko pierwsze cztery wyrazy tego ciągu maleją. Dla  $n = 4$  różnica jest równa 0, co oznacza, że czwarty i piąty wyraz ciągu jest taki sam. Ciąg ten nie jest zatem malejący.

**Schemat punktowania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy

- obliczy trzeci wyraz ciągu:  $a_3 = 5$

albo

- uzasadni, że ciąg nie jest malejący.

*Uwaga:*

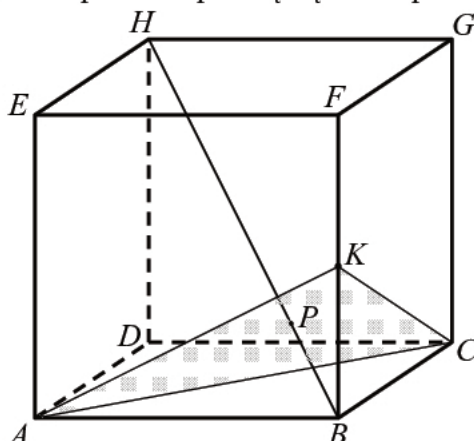
Zdający nie musi odwoływać się do definicji ciągu malejącego, wystarczy, że zauważy np., że  $a_5 = a_4$  lub zapisze, że dla  $n = 4$  różnica  $a_{n+1} - a_n = n - 4$  jest równa 0, albo że dla  $n > 4$  różnica jest dodatnia.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu:  $a_1 = 10$ .

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**  
gdy obliczy pierwszy wyraz ciągu  $a_1 = 10$  oraz uzasadni, że ciąg nie jest malejący.

**Zadanie 11. (0–3)**

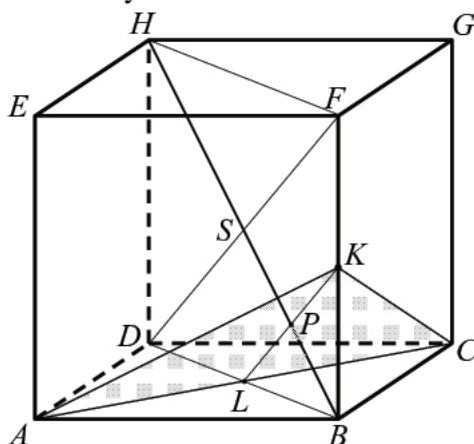
Dany jest sześcian  $ABCDEFGH$ . Przez wierzchołki  $A$  i  $C$  oraz środek  $K$  krawędzi  $BF$  poprowadzono płaszczyznę, która przecina przekątną  $BH$  w punkcie  $P$  (zobacz rysunek).



Wykaż, że  $|BP| : |HP| = 1 : 3$ .

**Rozwiązanie**

Punkt  $P$  leży w płaszczyźnie  $DBFH$  i jest punktem przecięcia przekątnej  $BH$  z odcinkiem  $KL$ , gdzie  $L$  to środek przekątnej  $BD$  ściany  $ABCD$ .



Odcinek  $KL$  łączy środki boków  $BD$  i  $BF$  trójkąta  $DBF$ , więc jest równoległy do boku  $DF$ . To oznacza, że trójkąt  $LBK$  jest podobny do trójkąta  $DBF$  w skali  $1:2$ . Zatem  $|BP| = \frac{1}{2}|BS|$ . Punkt  $S$  to środek przekątnej  $BH$  sześcianu, więc  $|BP| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|BH| = \frac{1}{4}|BH|$ . Stąd wynika, że  $|BP| : |HP| = 1 : 3$ . To kończy dowód.

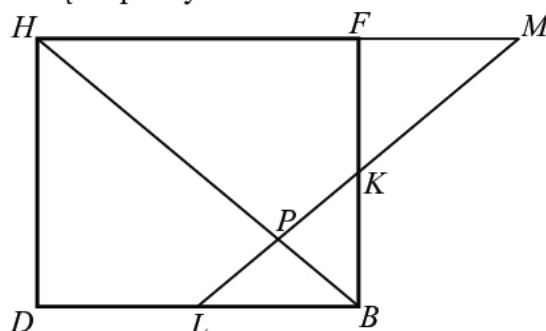


*Uwaga:*

Też możemy udowodnić też w inny sposób.

Sposób I

Niech  $M$  oznacza punkt przecięcia prostych  $LK$  i  $HF$ .



Wówczas trójkąty  $LBK$  i  $MFK$  są przystające, gdyż oba są prostokątne,  $|\sphericalangle LKB| = |\sphericalangle MKF|$  (kąty wierzchołkowe) i  $|KB| = |KF|$ . Stąd wynika, że  $|FM| = |LB| = \frac{1}{2}|DB|$ .

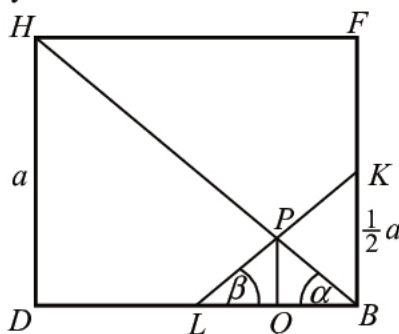
Trójkąty  $LBP$  i  $MHP$  są podobne ( $|\sphericalangle LBP| = |\sphericalangle MHP|$  i  $|\sphericalangle BLP| = |\sphericalangle HMP|$ , gdyż są to pary kątów naprzemianległych, a proste  $LB$  i  $HM$  są równoległe). Stąd

$$\frac{|BP|}{|HP|} = \frac{|LB|}{|HM|} = \frac{\frac{1}{2}|DB|}{|HF| + |FM|} = \frac{\frac{1}{2}|DB|}{|DB| + \frac{1}{2}|DB|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

To kończy dowód.

Sposób II

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wtedy  $|BK| = \frac{1}{2}a$ ,  $|DB| = a\sqrt{2}$ ,  $|LB| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ . Zatem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|HD|}{|DB|} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ i } \operatorname{tg} \beta = \frac{|KB|}{|LB|} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

a więc  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ . Stąd wynika, że  $\alpha = \beta$ , gdyż  $\alpha$  i  $\beta$  to kąty ostre. Stąd z kolei wynika, że trójkąt  $LBP$  jest równoramienny, więc spodek  $Q$  wysokości  $PQ$  tego trójkąta jest środkiem odcinka  $LB$ . Zatem  $|QB| = \frac{1}{2}|LB| = \frac{1}{4}|DB|$ .

Trójkąty  $BPQ$  i  $BHD$  są podobne (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku  $B$ ), więc

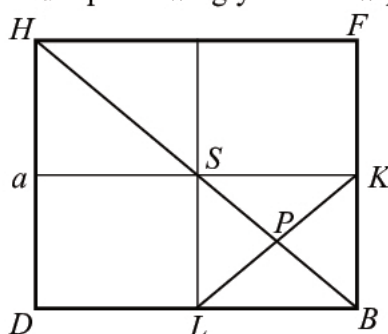
$$\frac{|BP|}{|HB|} = \frac{|QB|}{|DB|} = \frac{\frac{1}{4}|DB|}{|DB|} = \frac{1}{4}.$$

Stąd wynika, że  $|BP| : |HP| = 1 : 3$ .



## Sposób III

Poprowadźmy odcinek łączący środki przeciwległych boków prostokąta  $BFHD$ .



Przecinają się one w punkcie  $S$ , który jest środkiem przekątnej  $BH$  tego prostokąta. Punkt  $P$  jest natomiast środkiem przekątnej prostokąta  $BKSL$ . Stąd wynika, że

$$|BP| = \frac{1}{4}|BH| \text{ i } |HP| = \frac{3}{4}|BH|.$$

To oznacza, że  $|BP| : |HP| = 1 : 3$ .

## Schemat punktowania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy zauważy, że  $P$  jest punktem przecięcia przekątnej  $BH$  z odcinkiem  $KL$ , gdzie  $L$  to środek przekątnej  $BD$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy

- zapisze, że trójkąty  $LBK$  i  $DBF$  są podobne w skali  $1 : 2$

albo

- zapisze, że odcinek  $KL$  jest obrazem odcinka  $FD$  w jednokładności o środku  $B$  i skali  $\frac{1}{2}$ ,

albo

- wykaże, że trójkąt  $LBP$  jest równoramienny np. wykaże, że  $|\angle PBL| = |\angle PLB|$ ,

albo

- poprowadzi odcinki łączące środek przekątnej  $BH$  z punktami  $K$  i  $L$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**  
gdy wykaże, że  $|BP| : |HP| = 1 : 3$ .

**Zadanie 12. (0–4)**

Liczba  $m$  jest sumą odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania

$$k^2 x^2 + (k-1)x + 1 = 0, \text{ gdzie } k \neq 0.$$

Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem  $f(x) = 2^m$ .

**Rozwiązanie**

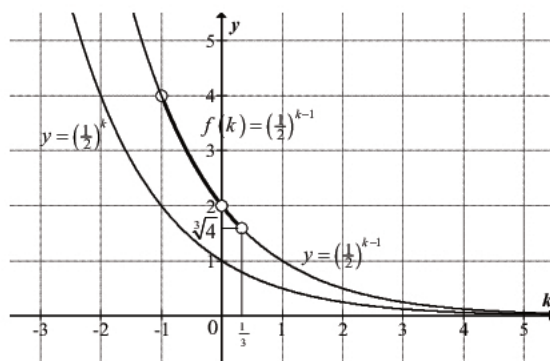
Równanie  $k^2 x^2 + (k-1)x + 1 = 0$  z niewiadomą  $x$  ma dwa rozwiązania rzeczywiste  $x_1, x_2$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $k \neq 0$  i  $(k-1)^2 - 4k^2 > 0$ , a więc dla  $k \in (-1, 0) \cup (0, \frac{1}{3})$ . Suma  $m$  odwrotności rozwiązań jest określona wtedy, gdy  $x_1 x_2 \neq 0$ , a więc (ze wzoru Viete'a) gdy  $\frac{1}{k^2} \neq 0$ . To zachodzi dla każdej wartości  $k \in (-1, 0) \cup (0, \frac{1}{3})$ . Zatem

$$m = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{k-1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}} = -(k-1).$$

Funkcja  $f$  jest więc określona wzorem

$$f(k) = 2^{-(k-1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \text{ dla } k \in (-1, 0) \cup (0, \frac{1}{3}).$$

Wykres funkcji  $f$  otrzymamy, przesuwając wykres funkcji wykładniczej  $g(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$  o wektor  $\vec{u} = [1, 0]$ , a następnie biorąc ten fragment otrzymanego wykresu, który odpowiada argumentom  $k \in (-1, 0) \cup (0, \frac{1}{3})$ .



Funkcja  $h$ , określona wzorem  $h(k) = 2^{-(k-1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$  jest malejąca,  $h(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-1} = 4$ ,  $h(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ ,  $h\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}-1} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$ , więc zbiorem wartości funkcji  $f$  jest  $(\sqrt[3]{4}, 2) \cup (2, 4)$ .

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający rozwiąże nierówność  $\Delta > 0$ :  $k \in \left(-1, \frac{1}{3}\right) \setminus \{0\}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający wyznaczy sumę odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania w zależności od  $k$ :

$$\text{np. } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -k + 1.$$

**Rozwiązanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający obliczy wartości funkcji wykładniczej  $h$ , określonej wzorem  $h(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$  dla argumentów  $-1, 0, \frac{1}{3}$ :  $h(-1) = 4$ ,  $h(0) = 2$ ,  $h\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt[3]{4}$

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający wykorzysta monotoniczność funkcji wykładniczej i wyznaczy zbiór wartości funkcji  $f: (\sqrt[3]{4}, 4) \setminus \{2\}$ .

*Uwagi:*

1. Jeżeli zdający zapisze i rozwiąże warunek  $\Delta \geq 0$ , to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie sumę odwrotności różnych rozwiązań danego równania, ale utworzy funkcję wykładniczą o niepoprawnym wzorze, to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający nie uwzględni warunku  $k \neq 0$  i wyznaczy zbiór wartości:  $(\sqrt[3]{4}, 4)$ , to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający błędnie rozwiąże nierówność  $\Delta > 0$ , ale przy wyznaczaniu zbioru wartości funkcji uwzględni warunek  $k \neq 0$ , to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
5. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże nierówność  $\Delta > 0$  i warunek  $k \neq 0$  uwzględni dopiero przy wyznaczaniu zbioru wartości funkcji  $f$ , to może otrzymać maksymalną liczbę punktów za całe rozwiązanie.
6. Jeżeli zdający niepoprawnie rozwiąże nierówność  $\Delta > 0$  i przy wyznaczaniu zbioru wartości funkcji nie uwzględni warunku  $k \neq 0$ , to za całe rozwiązanie otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.
7. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy sumę odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania w zależności od  $k$ , zapisze wzór funkcji  $f$ , stosując inną interpretację zmiennej niż przedstawiona w powyższym rozwiązaniu, to może otrzymać maksymalną liczbę punktów za całe rozwiązanie.
8. Akceptujemy następujące interpretacje.

**I sposób interpretacji**

Za taką odpowiedź zdający powinien otrzymać maksymalną punktację. Jeśli przyjąć, że równanie  $k^2x^2 + (k-1)x + 1 = 0$  to równanie z niewiadomą  $x$  i parametrem  $k$ , gdzie  $k \neq 0$ , to wtedy funkcja  $f$  zmiennej  $x$  jest stała i zbiorem jej wartości jest  $\{2^m\}$ .

**II sposób interpretacji**

Jeśli przyjąć, że równanie  $k^2x^2 + (k-1)x + 1 = 0$  to równanie z niewiadomą  $x$  i parametrem  $k$ , a funkcję  $f$  potraktować jako funkcję zmiennej  $k$ , to zbiorem wartości funkcji  $f$  jest

$$(\sqrt[3]{4}, 2) \cup (2, 4).$$

9. Jeśli zdający wyznaczy  $m$  w zależności od  $k$  (np.  $m = -k + 1$ ), ale nie zapisze warunku istnienia dwóch różnych pierwiastków równania kwadratowego i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 13. (0–3)**

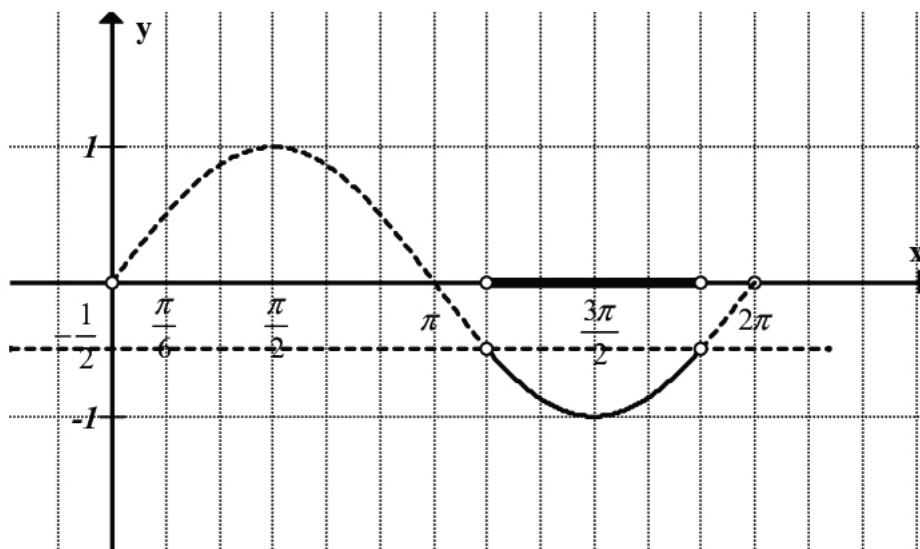
Rozwiąż nierówność  $(2 \sin x - 3)(2 \sin x + 1) > 0$  w przedziale  $x \in (0, 2\pi)$ .

**Rozwiązanie I sposób ( metoda podstawienia )**

Podstawmy  $\sin x = t$ , otrzymamy nierówność  $(2t - 3)(2t + 1) > 0$ .

Stąd  $t \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ , czyli  $\sin x < -\frac{1}{2}$  lub  $\sin x > \frac{3}{2}$ .

Nierówność  $\sin x > \frac{3}{2}$  jest sprzeczna, zatem rozwiązujemy nierówność  $\sin x < -\frac{1}{2}$  w przedziale  $x \in (0, 2\pi)$ .



Rozwiązanie:  $x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$ .

**Schemat punktowania****Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze****trudności zadania ..... 1 p.**

Zdający poda rozwiązanie nierówności  $(2t-3)(2t+1) > 0$ :  $t \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$

i zapisze go za pomocą alternatywy nierówności  $\sin x < -\frac{1}{2}$  lub  $\sin x > \frac{3}{2}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający

- zauważy, że nierówność  $\sin x > \frac{3}{2}$  jest sprzeczna

albo

- rozwiąże nierówność  $\sin x < -\frac{1}{2}$ :  $x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$  rozwiąże nierówność  $\sin x < -\frac{1}{2}$ :  

$$x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Zdający zauważy, że nierówność  $\sin x > \frac{3}{2}$  jest sprzeczna i rozwiąże nierówność  $\sin x < -\frac{1}{2}$ :

$$x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right).$$

**Rozwiązanie II sposób „zbiór wartości”**

Zdający zauważy, że nierówność  $2\sin x - 3 < 0$  spełniona jest dla  $x \in R$ .

Zatem, aby spełniona była nierówność  $(2\sin x - 3)(2\sin x + 1) > 0$  wystarczy rozwiązać warunek  $2\sin x + 1 < 0$ .

Stąd  $\sin x < -\frac{1}{2}$ , czyli  $x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$ .

**Schemat punktowania****Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający:

- zauważy, że nierówność  $2\sin x - 3 < 0$  spełniona jest dla  $x \in R$

albo

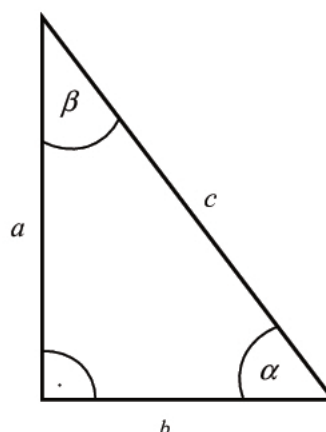
- rozwiąże nierówność  $\sin x < -\frac{1}{2}$ :  $x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.



**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**Zdający zauważy, że nierówność  $2\sin x - 3 < 0$  spełniona jest dla  $x \in R$  i rozwiążenierówność  $\sin x < -\frac{1}{2}$ :  $x \in \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$ .**Zadanie 14. (0–4)**W trójkącie prostokątnym stosunek różnicy długości przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy  $\frac{1}{2}$ . Oblicz cosinusy kątów ostrych tego trójkąta.**Rozwiązanie (I sposób)**

Sporządzamy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia.

Bez zmniejszania ogólności rozwiązania możemy założyć, że  $a > b$ . Otrzymujemy zatem równanie

$$\frac{a-b}{c} = \frac{1}{2},$$

które jest równoważne równaniu

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{1}{2}.$$

Oznacza to, że  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$ , a stąd wynika, że  $\sin \alpha = \cos \alpha + \frac{1}{2}$ . Podstawiamy tę zależność do tożsamości  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  i otrzymujemy równanie

$$2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - \frac{3}{4} = 0.$$

To równanie ma dwa rozwiązania:  $\cos \alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$ ,  $\cos \alpha = \frac{-1-\sqrt{7}}{4}$ .Ponieważ  $\alpha$  jest kątem ostrym, więc drugie rozwiązanie należy odrzucić. Pozostaje obliczyć cosinus drugiego kąta ostrego. Ale  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , więc  $\cos \beta = \sin \alpha$ .

Z równości

$$\sin \alpha = \cos \alpha + \frac{1}{2}$$

otrzymujemy  $\cos \beta = \sin \alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$ .

### **Schemat punktowania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny**

**na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.**

Zdający zapisze równość  $\frac{a-b}{c} = \frac{1}{2}$  w postaci  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający podstawia równość  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$  do tożsamości  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1$  i doprowadzi otrzymane równanie do postaci uporządkowanego równania kwadratowego, np.

$$2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - \frac{3}{4} = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający zapisze dwa rozwiązania tego równania

$$\cos \alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}, \cos \alpha = \frac{-1-\sqrt{7}}{4}$$

oraz odrzuci ujemne rozwiązanie tego równania i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

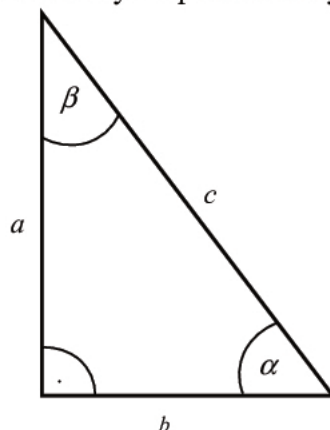
**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy i zapisze cosinusy obu kątów ostrych tego trójkąta:  $\cos \alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$ ,

$$\cos \beta = \frac{1+\sqrt{7}}{4}.$$

**Rozwiązanie (II sposób)**

Sporządzamy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia.



Bez straty ogólności rozwiązania możemy założyć, że  $a > b$ . Otrzymujemy zatem równanie

$$\frac{a-b}{c} = \frac{1}{2},$$

Z tej równości wyznaczamy  $a = b + \frac{c}{2}$ . Ponieważ dany trójkąt jest trójkątem prostokątnym, więc stosujemy twierdzenie Pitagorasa i mamy:

$$\left(b + \frac{c}{2}\right)^2 + b^2 = c^2,$$

które jest równoważne równaniu

$$3c^2 - 4bc - 8b^2 = 0.$$

Otrzymane równanie można potraktować jako równanie kwadratowe z niewiadomą  $c$  i parametrem  $b$ . Wyróżnik trójmianu stojącego po lewej stronie równania

$$\Delta = 112b^2 = (4b\sqrt{7})^2,$$

jest liczbą dodatnią ( $b > 0$ ), więc istnieją dwa rozwiązania tego równania:

$$c_1 = \frac{4b + 4b\sqrt{7}}{6} = \frac{2b(1+\sqrt{7})}{3} \text{ oraz } c_2 = \frac{4b - 4b\sqrt{7}}{6} = \frac{2b(1-\sqrt{7})}{3}.$$

Ponieważ  $c_2 < 0$ , więc to rozwiązanie należy odrzucić, bo  $c$  jest długością boku w trójkącie. Obliczamy zatem cosinus obu kątów ostrych tego trójkąta, stosując definicję funkcji cosinus w trójkącie prostokątnym:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{b}{\frac{2b(1+\sqrt{7})}{3}} = \frac{3}{2(1+\sqrt{7})} = \frac{3(1-\sqrt{7})}{-12} = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}.$$

Podstawiamy  $c = \frac{2b(1+\sqrt{7})}{3}$  do równości  $a = b + \frac{c}{2}$  i otrzymujemy  $a = \frac{b(4+\sqrt{7})}{3}$ .

Zatem cosinus drugiego kąta ostrego jest równy:

$$\cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\frac{b(4+\sqrt{7})}{3}}{\frac{2b(1+\sqrt{7})}{3}} = \frac{4+\sqrt{7}}{2(1+\sqrt{7})} = \frac{-3(1+\sqrt{7})}{-12} = \frac{1+\sqrt{7}}{4}.$$

**Schemat punktowania II sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny****na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.**Zdający zapisze równość  $\frac{a-b}{c} = \frac{1}{2}$ , a następnie wyznaczy z niej jedną zmienną np.

$$a = b + \frac{c}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**Zdający skorzysta z twierdzenia Pitagorasa i doprowadzi równanie  $\left(b + \frac{c}{2}\right)^2 + b^2 = c^2$  do równania kwadratowego z niewiadomą  $c$  i parametrem  $b$ 

$$3c^2 - 4bc - 8b^2 = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**Zdający zapisze dodatnie rozwiązanie tego równania  $c_1 = \frac{2b(1+\sqrt{7})}{3}$ , a następnie obliczy cosinus kąta  $\alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**Zdający obliczy i zapisze cosinusy obu kątów ostrych tego trójkąta:  $\cos \alpha = \frac{-1+\sqrt{7}}{4}$ ,

$$\cos \beta = \frac{1+\sqrt{7}}{4}.$$

**Zadanie 15. (0–4)**

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie trzy cyfry nieparzyste.

**Rozwiązanie (I sposób)**

Rozpatrujemy dwa przypadki:

- Jeśli pierwszą cyfrą jest cyfra nieparzysta, którą możemy wybrać na 5 sposobów, to z czterech pozostałych miejsc wybieramy dwa, na które wstawiamy cyfry nieparzyste. Możemy to zrobić na  $5^2$  sposobów. Na pozostałych dwóch miejscach umieszczamy cyfry parzyste na  $5^2$  sposobów. Liczba wszystkich utworzonych w ten sposób liczb pięciocyfrowych wynosi  $5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 18750$ .
- Jeśli pierwszą cyfrą jest cyfra parzysta, którą możemy wybrać na 4 sposoby, to z czterech pozostałych miejsc wybieramy trzy, na które wstawiamy cyfry nieparzyste. Możemy to zrobić na  $5^3$  sposobów. Na pozostałym miejscu umieszczamy cyfrę

parzystą na 5 sposobów. Liczba wszystkich utworzonych w ten sposób liczb pięciocyfrowych wynosi  $4 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 5 = 10000$ .

Zatem wszystkich liczb pięciocyfrowych spełniających podane w zadaniu warunki jest  $18750 + 10000 = 28750$ .

## Rozwiązanie (II sposób)

W pierwszej kolejności obliczymy liczbę wszystkich ciągów 5-wyrazowych, których wyrazami są elementami zbioru  $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$  oraz dokładnie 3 wyrazy to cyfry nieparzyste:  $\binom{5}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^2$ . Wśród nich jest  $\binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 5$  ciągów, których pierwszym wyrazem jest cyfra 0. Pozostałe ciągi reprezentują rozpatrywane liczby.

Zatem wszystkich liczb pięciocyfrowych spełniających podane w zadaniu warunki jest:

$$\binom{5}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^2 - \binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 5 = \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 5^5 - 4 \cdot 5^4 = 10 \cdot 5 \cdot 5^4 - 4 \cdot 5^4 = 46 \cdot 5^4 = 28750.$$

## Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny do całkowitego rozwiązania zadania..... 1 p.**

Zdający

- rozpatrzy dwa przypadki ze względu na to, czy pierwsza cyfra liczby (licząc od lewej strony) jest parzysta, czy nieparzysta i w każdym z tych przypadków zapisze na ile sposobów można wybrać pierwszą cyfrę: 4 w pierwszy przypadku, 5 w drugim przypadku

albo

- zapisze, że jest  $\binom{5}{3}$  możliwości rozmieszczenia trzech cyfr nieparzystych,

albo

- zapisze 10 przypadków rozmieszczenia trzech cyfr nieparzystych:

```

N N _ _ _
N _ N _ _
N _ _ N _
N _ _ _ N
_ N N _ _
_ N _ N _
_ N _ _ N
_ _ N N _
_ _ N _ N
_ _ _ N N,
```

albo

- zapisze, że albo obliczyć liczbę wszystkich rozpatrywanych liczb wystarczy od liczby wszystkich ciągów 5-wyrazowych, których wyrazami są elementami zbioru  $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$  oraz dokładnie 3 wyrazy to cyfry nieparzystymi odjąć liczbę wszystkich ciągów 5-wyrazowych, których wyrazami są elementy zbioru  $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$  i pierwszym wyrazem ciągu jest cyfra 0

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.



**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający zapisze liczbę wszystkich

- rozpatrywanych liczb, których pierwsza cyfra jest parzysta:  $4 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 5$

albo

- rozpatrywanych liczb, których pierwsza cyfra jest nieparzysta:  $5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^2$ ,

albo

- liczbę wszystkich ciągów 5-wyrazowych, których wyrazami są elementami zbioru  $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$  oraz dokładnie 3 wyrazy to cyfry nieparzystymi:  $\binom{5}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^2$ ,

albo

- zapisze liczbę wszystkich ciągów 5-wyrazowych, których wyrazami są elementy zbioru  $\{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$  i pierwszym wyrazem ciągu jest cyfra 0:  $\binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 5$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający zapisze liczbę wszystkich rozpatrywanych liczb pięciocyfrowych

- $4 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 5 + 5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^2$

albo

- $\binom{5}{3} \cdot 5^3 \cdot 5^2 - \binom{4}{3} \cdot 5^3 \cdot 5$ ,

albo

- obliczy bezbłędnie liczbę liczb pięciocyfrowych spełniających warunki zadania, których pierwszą cyfrą jest cyfra nieparzysta, a liczbę liczb pięciocyfrowych spełniających warunki zadania, których pierwszą cyfrą jest cyfra parzysta obliczy z błędem rachunkowym (lub odwrotnie) i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy liczbę rozpatrywanych liczb.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający, obliczy, że wszystkich liczb pięciocyfrowych spełniających podane w zadaniu warunki jest 28750.

*Uwaga:*

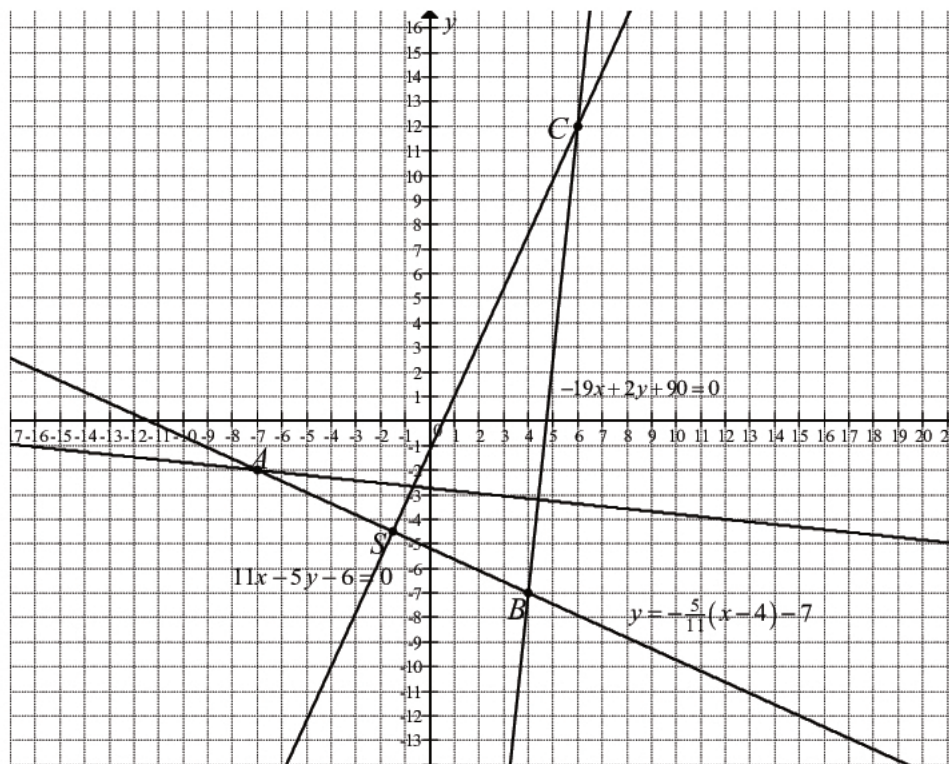
Jeżeli zdający pominie jeden z 10 przypadków rozmieszczenia trzech cyfr nieparzystych i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

**Zadanie 16. (0–5)**

Punkty  $A = (-7, -2)$  i  $B = (4, -7)$  są wierzchołkami podstawy trójkąta równoramiennego  $ABC$ , a wysokość opuszczona z wierzchołka  $A$  tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu  $2x + 19y + 52 = 0$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $C$ .

**Rozwiązanie (I sposób)**

Trójkąt  $ABC$  jest równoramienny, więc wierzchołek  $C$  leży na symetralnej podstawy  $AB$  i na prostej  $BC$ , która jest prostopadła do prostej o równaniu  $2x + 19y + 52 = 0$  (wysokości opuszczonej z wierzchołka  $A$  tego trójkąta).



Niech  $S$  będzie środkiem odcinka  $AB$ . Ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$S = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left( \frac{-7 + 4}{2}, \frac{-2 - 7}{2} \right) = \left( -\frac{3}{2}, -\frac{9}{2} \right).$$

Prosta  $AB$  ma równanie postaci  $y = \frac{-7 - (-2)}{4 - (-7)}(x - 4) - 7$ , czyli  $y = -\frac{5}{11}(x - 4) - 7$ .

Symetralna odcinka  $AB$  jest prostopadła do prostej o równaniu  $y = -\frac{5}{11}(x - 4) - 7$  i przechodzi przez punkt  $S$ , zatem ma postać  $y = \frac{11}{5}\left(x + \frac{3}{2}\right) - \frac{9}{2}$ , czyli  $y = \frac{11}{5}x - \frac{6}{5}$  lub  $11x - 5y - 6 = 0$ .

Prosta  $BC$  jest prostopadła do prostej o równaniu  $2x + 19y + 52 = 0$  i przechodzi przez punkt  $B = (4, -7)$ , więc ma równanie postaci  $-19(x - 4) + 2(y + 7) = 0$ , czyli  $-19x + 2y + 90 = 0$ .

Obliczmy współrzędne punktu  $C$  przecięcia tych dwóch prostych, rozwiązując układ równań

$$y = \frac{11}{5}x - \frac{6}{5} \text{ i } -19x + 2y + 90 = 0.$$

Stąd

$$\begin{aligned} -19x + 2\left(\frac{11}{5}x - \frac{6}{5}\right) + 90 &= 0, \\ -19 \cdot 5x + 2(11x - 6) + 90 \cdot 5 &= 0, \\ 73x &= 438, \\ x &= 6. \end{aligned}$$

Zatem  $y = \frac{11}{5} \cdot 6 - \frac{6}{5} = \frac{60}{5} = 12$ , więc  $C = (6, 12)$ .

*Uwaga:*

Równanie symetralnej podstawy  $AB$  trójkąta możemy wyznaczyć nieco inaczej.

Sposób a). Wykorzystamy fakt, że jest ona prostopadła do wektora  $AB$  i przechodzi przez środek  $S$  odcinka  $AB$ . Współrzędne wektora  $AB$  są równe  $\overrightarrow{AB} = [4 - (-7), -7 - (-2)] = [11, -5]$ .

Symetralna odcinka  $AB$  jest prostopadła do wektora  $AB$  i przechodzi przez punkt  $S = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$ , więc ma ona równanie postaci  $11\left(x + \frac{3}{2}\right) - 5\left(y + \frac{9}{2}\right) = 0$ , czyli  $11x - 5y - 6 = 0$ .

Sposób b). Wykorzystamy fakt, że symetralna odcinka jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny równo oddalonych od jego końców. Niech  $C = (x, y)$  będzie dowolnym punktem leżącym na symetralnej odcinka  $AB$ . Zatem  $|AC| = |BC|$ . Stąd, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+7)^2 + (y+2)^2} &= \sqrt{(x-4)^2 + (y+7)^2}, \\ (x+7)^2 + (y+2)^2 &= (x-4)^2 + (y+7)^2, \\ x^2 + 14x + 49 + y^2 + 4y + 4 &= x^2 - 8x + 16 + y^2 + 14y + 49, \\ 11x - 5y - 6 &= 0, \text{ czyli } y = \frac{11}{5}x - \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

## Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- wyznaczy współrzędne środka  $S$  podstawy  $AB$  i zapisze równanie prostej  $AB$ :

$$S = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right), \quad y = -\frac{5}{11}(x - 4) - 7$$

albo

- wyznaczy współrzędne środka  $S$  podstawy  $AB$  i obliczy współczynnik kierunkowy prostej  $AB$ :  $S = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right), \quad a = -\frac{5}{11},$

albo

- wyznaczy współrzędne środka  $S$  podstawy  $AB$  i obliczy współrzędne wektora  $AB$ :

$$S = \left( -\frac{3}{2}, -\frac{9}{2} \right), \quad \overrightarrow{AB} = [11, -5],$$

albo

- zapisze równanie symetralnej odcinka  $AB$  w postaci

$$\sqrt{(x+7)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+7)^2}.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający wyznaczy:

- równanie prostej  $SC$ :  $y = \frac{11}{5}x - \frac{6}{5}$  lub  $11x - 5y - 6 = 0$

albo

- równanie prostej  $BC$ :  $-19x + 2y + 90 = 0$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 4 p.**

Zdający wyznaczy równania prostych  $SC$  i  $BC$ :  $y = \frac{11}{5}x - \frac{6}{5}$  (lub  $11x - 5y - 6 = 0$ ),  $-19x + 2y + 90 = 0$  i zapisze, że  $C$  jest punktem przecięcia tych dwóch prostych.

*Uwaga:*

Jeżeli zdający wyznaczając równania prostych  $SC$  i  $BC$  popełni błąd rachunkowy, to otrzymuje **3 punkty**.

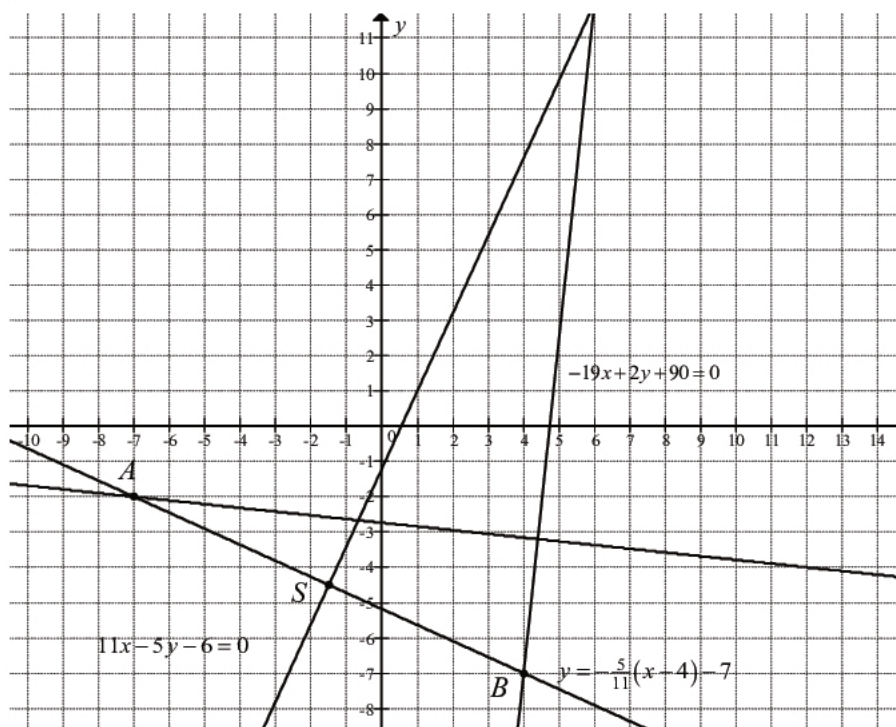
**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka  $C$ :  $(6, 12)$ .



**Rozwiązanie (II sposób)**

Trójkąt  $ABC$  jest równoramienny, więc  $|AC| = |BC|$  i punkt  $C$  leży na prostej  $BC$ , która jest prostopadła do w prostej o równaniu  $2x + 19y + 52 = 0$  (wysokości opuszczonej z wierzchołka  $A$  tego trójkąta).



Prosta  $BC$  jest prostopadła do prostej o równaniu  $2x + 19y + 52 = 0$  i przechodzi przez punkt  $B = (4, -7)$ , więc ma równanie postaci

$$\begin{aligned} -19(x - 4) + 2(y + 7) &= 0, \\ -19x + 2y + 90 &= 0, \\ y &= \frac{19}{2}x - 45. \end{aligned}$$

Zatem punkt  $C$  ma współrzędne  $C = \left(x_c, \frac{19}{2}x_c - 45\right)$ .

Trójkąt  $ABC$  jest równoramienny i jego podstawą jest  $AB$ , zatem  $|AC| = |BC|$ .

Zatem

$$\sqrt{(x_c + 7)^2 + \left(\frac{19}{2}x_c - 45 + 2\right)^2} = \sqrt{(x_c - 4)^2 + \left(\frac{19}{2}x_c - 45 + 7\right)^2}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} (x_c + 7)^2 + \left(\frac{19}{2}x_c - 45 + 2\right)^2 &= (x_c - 4)^2 + \left(\frac{19}{2}x_c - 45 + 7\right)^2, \\ (x_c + 7)^2 + \left(\frac{19}{2}x_c - 43\right)^2 &= (x_c - 4)^2 + \left(\frac{19}{2}x_c - 38\right)^2, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
x_c^2 + 14x_c + 49 + \left(\frac{19}{2}x_c\right)^2 - 2 \cdot \frac{19}{2}x_c \cdot 43 + 1849 &= x_c^2 - 8x_c + 16 + \left(\frac{19}{2}x_c\right)^2 - 2 \cdot \frac{19}{2}x_c \cdot 38 + 1444, \\
14x_c + 49 - 19 \cdot 43x_c + 1849 &= -8x_c + 16 - 19 \cdot 38x_c + 1444, \\
14x_c + 722x_c - 817x_c + 8x_c &= -1849 + 16 - 49 + 1444, \\
-73x &= -438, \\
x &= 6.
\end{aligned}$$

Stąd  $y = \frac{19}{2} \cdot 6 - 45 = 57 - 45 = 12$ , więc  $C = (6, 12)$ .

### **Schemat punktowania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający zapisze, że  $|AC| = |BC|$  i punkt  $C$  leży na prostej  $BC$ , która jest prostopadła do prostej o równaniu  $2x + 19y + 52 = 0$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający wyznaczy równanie prostej  $BC$ :  $-19x + 2y + 90 = 0$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 4 p.**

Zdający zapisze współrzędne punktu  $C$  w zależności od jednej zmiennej  $C = \left(x_c, \frac{19}{2}x_c - 45\right)$  oraz zapisze równanie z jedną niewiadomą pozwalające obliczyć współrzędną punktu  $C$ , np.:

$$\sqrt{(x_c + 7)^2 + \left(\frac{19}{2}x_c - 45 + 2\right)^2} = \sqrt{(x_c - 4)^2 + \left(\frac{19}{2}x_c - 45 + 7\right)^2}.$$

*Uwaga:*

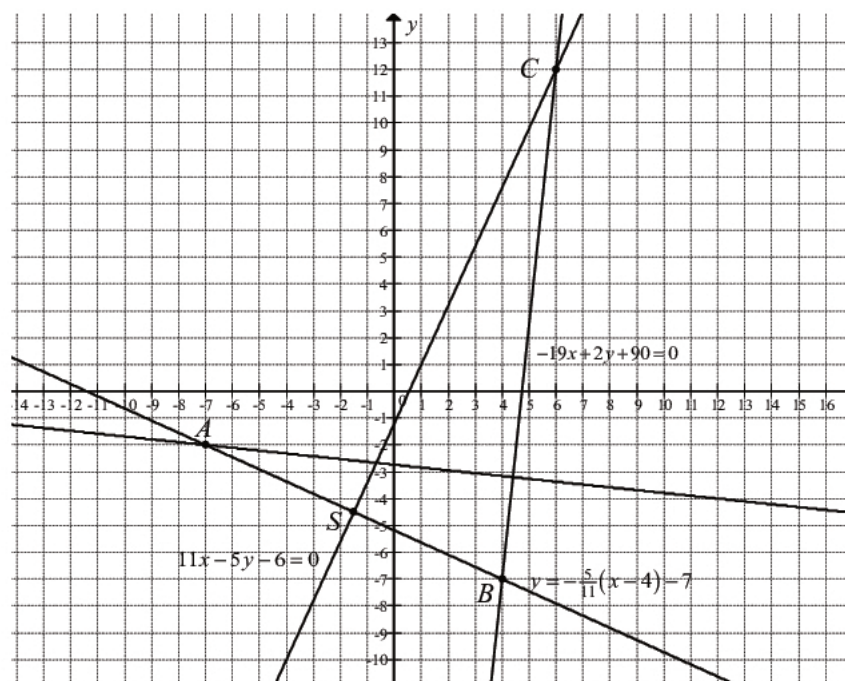
Jeżeli zdający zapisze współrzędne punktu  $C$  w zależności od jednej zmiennej  $C = \left(x_c, \frac{19}{2}x_c - 45\right)$  i nie zapisze równania z jedną niewiadomą pozwalającego obliczyć współrzędną punktu  $C$ , to otrzymuje **3 punkty**.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka  $C$ :  $(6, 12)$ .

**Rozwiązanie (III sposób)**

Trójkąt  $ABC$  jest równoramienny, więc wierzchołek  $C$  leży na symetralnej podstawy  $AB$



Niech  $C = (c_1, c_2)$ . Punkt  $C$  leży na prostej  $BC$ , która jest prostopadła do prostej o równaniu  $2x + 19y + 52 = 0$  (zawierającej wysokość opuszczoną z wierzchołka  $A$  tego trójkąta). Prosta  $BC$  jest prostopadła do prostej o równaniu  $2x + 19y + 52 = 0$ , więc wektor  $\overrightarrow{BC}$  ma współrzędne  $\overrightarrow{BC} = k \cdot [2, 19]$  oraz  $\overrightarrow{BC} = [c_1 - 4, c_2 + 7]$ .

Zatem

$$[c_1 - 4, c_2 + 7] = k \cdot [2, 19],$$

$$c_1 - 4 = k \cdot 2, \quad c_2 + 7 = k \cdot 19,$$

$$c_1 = 2k + 4, \quad c_2 = 19k - 7.$$

Punkt  $C$  ma współrzędne  $C = (2k + 4, 19k - 7)$ .

Niech  $S$  będzie środkiem odcinka  $AB$ . Ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$S = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left( \frac{-7 + 4}{2}, \frac{-2 - 7}{2} \right) = \left( -\frac{3}{2}, -\frac{9}{2} \right).$$

Prosta  $AB$  ma równanie postaci  $y = \frac{-7 - (-2)}{4 - (-7)}(x - 4) - 7$ , czyli  $y = -\frac{5}{11}(x - 4) - 7$ .

Symetralna odcinka  $AB$  jest prostopadła do prostej o równaniu  $y = -\frac{5}{11}(x - 4) - 7$  i przechodzi przez punkt  $S$ , zatem ma postać

$$y = \frac{11}{5} \left( x + \frac{3}{2} \right) - \frac{9}{2},$$

$$y = \frac{11}{5}x - \frac{6}{5}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}19k - 7 &= \frac{11}{5}(2k + 4) - \frac{6}{5}, \\95k - 35 &= 11(2k + 4) - 6, \\95k - 22k &= 35 = 44 - 6 + 35, \\73k &= 73, \\k &= 1.\end{aligned}$$

*Uwaga:*

Obliczenia, gdy prosta  $SC$  ma postać  $11x - 5y - 6 = 0$ .

$$\begin{aligned}11(2k + 4) - 5(19k - 7) - 6 &= 0, \\22k + 44 - 95k + 35 - 6 &= 0, \\73k &= 73, \\k &= 1.\end{aligned}$$

Stąd punkt  $C$  ma współrzędne  $C = (2 \cdot 1 + 4, 19 \cdot 1 - 7) = (6, 12)$ .

### Schemat punktowania III sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający zapisze:

- prosta  $BC$  jest prostopadła do prostej o równaniu  $2x + 19y + 52 = 0$ , więc wektor  $\overrightarrow{BC}$  ma współrzędne  $\overrightarrow{BC} = k \cdot [2, 19]$

albo

- współrzędne punktu  $C$ , np.:  $C = (c_1, c_2)$  oraz współrzędne wektora  $\overrightarrow{BC}$  w postaci, np.  $\overrightarrow{BC} = [c_1 - 4, c_2 + 7]$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający wyznaczy współrzędne punktu  $C$  w zależności od parametru  $k$ ,

$$\text{np. } C = (2k + 4, 19k - 7).$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 4 p.**

Zdający wyznaczy równanie symetralnej odcinka  $AB$ :  $11x - 5y - 6 = 0$  i wstawi współrzędne punktu  $C = (2k + 4, 19k - 7)$  do tego równania.

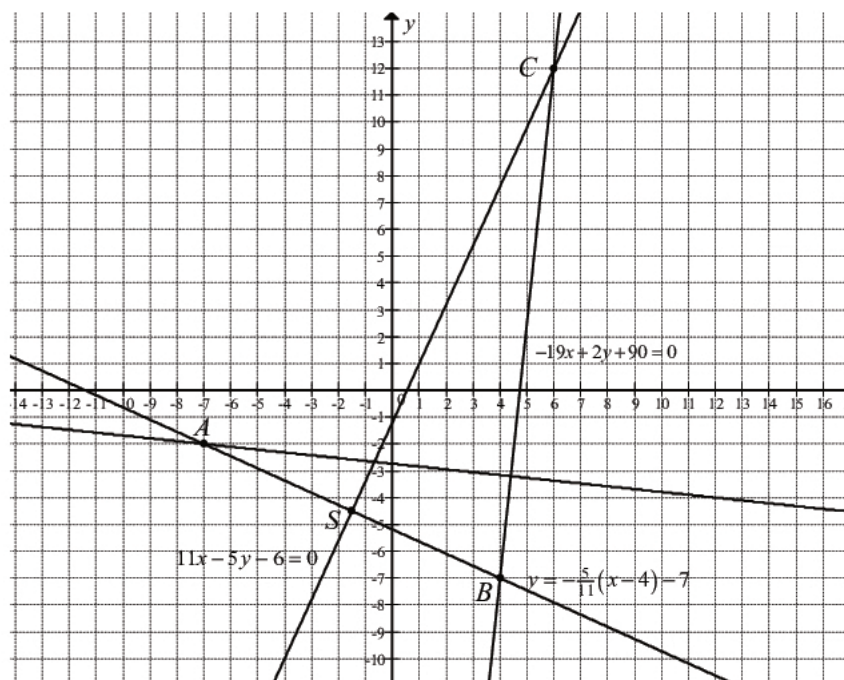
**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

Zdający obliczy współrzędne wierzchołka  $C$ :  $(6, 12)$

*Uwaga:*

Zdający może przeprowadzić następujące rozważania.

Punkt  $C$  leży na prostej  $BC$ , która jest prostopadła do w prostej o równaniu  $2x + 19y + 52 = 0$  (wysokości opuszczonej z wierzchołka  $A$  tego trójkąta).



Punkt  $C$  ma współrzędne  $C = (c_1, c_2)$ .

Prosta  $BC$  jest prostopadła do prostej o równaniu  $2x + 19y + 52 = 0$ , więc wektor  $\overrightarrow{BC}$  może mieć współrzędne  $\overrightarrow{BC} = [2, 19]$  oraz  $\overrightarrow{BC} = [c_1 - 4, c_2 + 7]$ .

Zatem

$$\begin{aligned} [c_1 - 4, c_2 + 7] &= [2, 19], \\ c_1 - 4 &= 2, \quad c_2 + 7 = 19, \\ c_1 &= 6, \quad c_2 = 12. \end{aligned}$$

Punkt  $C$  może mieć współrzędne  $C = (6, 12)$ .

Następnie należy sprawdzić jeden z warunków :

- czy zachodzi równość  $|AC| = |BC|$ ,
- czy punkt  $C = (6, 12)$  leży na symetralnej podstawy  $AB$ .

Sprawdzenie warunku  $|AC| = |BC|$

Obliczamy

$$|AC| = \sqrt{(6+7)^2 + (12+2)^2} = \sqrt{13^2 + 14^2} = \sqrt{169 + 196} = \sqrt{365}$$

oraz

$$|BC| = \sqrt{(6-4)^2 + (12+7)^2} = \sqrt{2^2 + 19^2} = \sqrt{4 + 361} = \sqrt{365}.$$

Stąd  $|AC| = |BC|$  i punkt  $C = (6, 12)$ .

Sprawdzenie czy punkt  $C = (6, 12)$  leży na symetralnej podstawy  $AB$ .

Wyznaczamy równanie symetralnej  $SC$ .

Niech  $S$  będzie środkiem odcinka  $AB$ . Ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$S = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left( \frac{-7 + 4}{2}, \frac{-2 - 7}{2} \right) = \left( -\frac{3}{2}, -\frac{9}{2} \right).$$

Prosta  $AB$  ma równanie postaci  $y = \frac{-7 - (-2)}{4 - (-7)}(x - 4) - 7$ , czyli  $y = -\frac{5}{11}(x - 4) - 7$ .

Symetralna odcinka  $AB$  jest prostopadła do tej i przechodzi przez punkt  $S$ , zatem ma postać

$$y = \frac{11}{5} \left( x + \frac{3}{2} \right) - \frac{9}{2},$$

$$y = \frac{11}{5}x - \frac{6}{5} \text{ lub } 11x - 5y - 6 = 0.$$

Sprawdzamy, czy współrzędne punktu  $C = (6, 12)$  spełniają równanie symetralnej:

$$y = \frac{11}{5} \cdot 6 - \frac{6}{5} = \frac{66 - 6}{5} = 12. \text{ Zatem wierzchołek } C \text{ ma współrzędne: } (6, 12).$$

*Uwagi:*

1. Jeżeli zdający tylko poda współrzędne punktu  $C = (6, 12)$ , to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający poda współrzędne punktu  $C = (6, 12)$  i konsekwentnie sprawdzi czy zachodzi równość  $|AC| = |BC|$ , to może otrzymać **5 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający poda współrzędne punktu  $C = (6, 12)$ , wyznaczy równanie symetralnej podstawy  $AB$  i konsekwentnie sprawdzi, czy punkt  $C$  leży na tej symetralnej, to może otrzymać **5 punktów** za całe rozwiązanie.



**Zadanie 17. (0–7)**

Rozpatrujemy wszystkie walce, których pole powierzchni całkowitej jest równe  $2\pi$ . Oblicz promień podstawy tego walca, który ma największą objętość. Podaj tę największą objętość.

**Rozwiązanie**

Niech  $r$  oraz  $h$  oznaczają, odpowiednio, promień i wysokość walca ( $r > 0$  i  $h > 0$ ). Ponieważ pole  $P$  powierzchni całkowitej tego walca jest określone wzorem  $P = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ , więc otrzymujemy równanie  $2\pi = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ , które jest równoważne równaniu  $1 = r^2 + rh$ . Z tego równania wyznaczamy wysokość walca,  $h = \frac{1-r^2}{r}$ . Zauważamy, że nierówność  $h > 0$  jest równoważna nierówności  $0 < r < 1$ . Objętość walca równą  $V = \pi r^2 h$  zapisujemy jako funkcję zmiennej  $r$ :

$$V(r) = \pi r^2 \cdot \frac{1-r^2}{r} = \pi r - \pi r^3, \text{ gdzie } 0 < r < 1.$$

Pochodna tej funkcji jest określona wzorem  $V'(r) = \pi(1-3r^2)$  dla  $0 < r < 1$ . Dla  $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$

pochoďna funkcji przyjmuje wartość zero. Ponadto, dla  $0 < r < \frac{\sqrt{3}}{3}$  pochodna funkcji

przyjmuje wartości dodatnie, zaś dla  $\frac{\sqrt{3}}{3} < r < 1$  wartości dodatnie. Oznacza to, że w punkcie

$r = \frac{\sqrt{3}}{3}$  objętość  $V$  tego walca osiąga maksimum lokalne. To maksimum lokalne jest jednocześnie największą wartością funkcji  $V(r) = \pi r - \pi r^3$  w przedziale  $(0, 1)$ , ponieważ dla

$0 < r \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$  funkcja  $V$  jest rosnąca, a dla  $\frac{\sqrt{3}}{3} \leq r < 1$  jest malejąca.

Zatem, przy danym polu powierzchni całkowitej, największą objętość ma walec, którego promień podstawy równa się  $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Jeżeli  $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , to  $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Największa objętość tego

walca jest więc równa  $V = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$ .

**Schemat punktowania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) **Pierwszy etap** składa się z trzech części:

- zapisanie równania  $2\pi = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ ,
- zapisanie objętości danego walca jako funkcji jednej zmiennej, np.

$$V(r) = \pi r^2 \cdot \frac{1-r^2}{r} = \pi r - \pi r^3,$$

- zapisanie, że dziedziną funkcji  $V(r)$  jest przedział  $(0, 1)$ .

Za zapisanie poprawnego równania w **pierwszej** części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**. Za poprawne zapisanie objętości rozważanego walca w **drugiej** części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile pierwsza część etapu została zrealizowana bezbłędnie. Punkt za **trzecią** część zdający otrzymuje niezależnie od realizacji dwóch pierwszych części.

b) **Drugi etap** składa się z trzech części:

- zapisanie wzoru pochodnej funkcji  $V(r)$ , np.:  $V'(r) = \pi(1 - 3r^2)$ ,
- zapisanie, że w przedziale  $(0, 1)$  pochodna funkcji  $V$  ma jedno miejsce zerowe

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

- zapisanie, że funkcja  $V(r)$  osiąga w punkcie  $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$  maksimum lokalne i uzasadnienie, że to maksimum lokalne jest jednocześnie największą wartością tej funkcji.

Za poprawne rozwiązanie **każdej** z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

c) **Trzeci etap**:

**1 punkt** zdający otrzyma za zapisanie, że dla  $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$  walec ma największą objętość równą

$$V = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi.$$

*Uwaga:*

Punkty za realizację danego etapu przyznajemy tylko wówczas, gdy zdający rozwiązał poprawnie poprzedni etap zadania.