

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2017/2018**

**MATEMATYKA**

**POZIOM PODSTAWOWY**

**FORMUŁA DO 2014 („STARA MATURA”)**

**+**

**FORMUŁA OD 2015 („NOWA MATURA”)**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ**

**ARKUSZ MMA-P1**

**CZERWIEC 2018**

**Egzaminatorze!**

- Oceniaj prace zdających uczciwie i z zaangażowaniem.
- **Stosuj przyjęte zasady oceniania w sposób obiektywny.** Pamiętaj, że każda merytorycznie poprawna odpowiedź, spełniająca warunki określone w poleceniu, musi zostać pozytywnie oceniona, nawet jeżeli nie została przewidziana w przykładowych odpowiedziach w zasadach oceniania.
- Konsultuj niejednoznaczne rozwiązania zadań z innymi egzaminatorami lub przewodniczącym zespołu egzaminatorów. W przypadku niemożności osiągnięcia wspólnego stanowiska, rozstrzygajcie na korzyść zdającego.
- Przyznając punkty, nie kieruj się emocjami.
- Informuj przewodniczącego o wszystkich nieprawidłowościach zaistniałych w trakcie oceniania, w tym podejrzeniach o niesamodzielność w pisaniu pracy.

## Klucz punktowania zadań zamkniętych

| Nr zad. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Odp.    | A | D | D | C | B | A | D | B | B | B  | C  | D  | B  | B  | C  | D  | A  | D  | A  | C  | D  | C  | A  | A  | C  |

## Schemat oceniania zadań otwartych

**Zadanie 26. (0–2)**

Rozwiąż nierówność  $2x(1-x)+1-x < 0$ .

**Rozwiązanie**

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap polega na obliczeniu pierwiastków trójmianu kwadratowego.

Drugi etap polega na zapisaniu zbioru rozwiązań nierówności.

**Realizacja pierwszego etapu**

- wyłączamy czynnik  $(1-x)$  przed nawias i zapisujemy lewą stronę nierówności w postaci iloczynowej  $(1-x)(2x+1) < 0$ , a następnie zapisujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $y = (1-x)(2x+1)$

$$x_1 = 1 \text{ oraz } x_2 = -\frac{1}{2}$$

albo

- wyłączamy czynnik  $(1-x)$  przed nawias i zapisujemy lewą stronę nierówności w postaci iloczynowej  $(1-x)(2x+1) < 0$ , a następnie zapisujemy alternatywę dwóch układów nierówności

$$\begin{cases} 1-x > 0 \\ 2x+1 < 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} 1-x < 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$$

i równoważnie

$$\begin{cases} x < 1 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x > 1 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

albo

- zapisujemy lewą stronę nierówności w postaci  $-2x^2 + x + 1 < 0$  obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta = 1 - 4 \cdot (-2) \cdot 1 = 9 \text{ i stąd } x_1 = \frac{-1-3}{-4} = 1 \text{ oraz } x_2 = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}$$

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}$  lub zaznaczając je na wykresie.

**Realizacja drugiego etapu**

Zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności:  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ .

**Schemat oceniania****Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy:

- obliczy lub poda pierwiastki trójkątnu kwadratowego  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}$  i na tym zakończy  
lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- zapisze alternatywę dwóch układów nierówności

$$\begin{cases} x < 1 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x > 1 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy,

albo

- zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji  $f(x) = 2x(1-x) + (1-x)$  i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ten sam błąd popełniony wielokrotnie traktujemy jak jeden błąd), ale otrzyma dwa różne pierwiastki trójkątnu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy:

- zapisze zbiór rozwiązań nierówności:  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$  lub

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty),$$

$$\text{lub } x < -\frac{1}{2} \text{ lub } x > 1$$

albo

- sporządzi poprawną ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x < -\frac{1}{2}$ ,  $x > 1$ ,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

**Zadanie 27. (0–2)**

Wykresem funkcji kwadratowej  $f$  określonej wzorem  $f(x) = x^2 + bx + c$  jest parabola, na której leży punkt  $A = (0, -5)$ . Oś symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu  $x = 7$ . Oblicz wartości współczynników  $b$  i  $c$ .

**Rozwiązanie (I sposób)**

Ponieważ prosta o równaniu  $x = 7$  jest osią symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji  $f$ , więc pierwsza współrzędna wierzchołka tej paraboli jest równa 7, czyli

*Schemat oceniania*  
*Poziom podstawowy*

$$-\frac{b}{2a} = 7,$$

$$-\frac{b}{2} = 7.$$

Stąd  $b = -14$ .

Wykres funkcji przechodzi przez punkt  $A = (0, -5)$ , więc wyraz wolny  $c$  we wzorze funkcji jest równy  $c = -5$ .

Odpowiedź. Wartości współczynników  $b$  i  $c$  są równe:  $b = -14$ ,  $c = -5$ .

**Rozwiązanie (II sposób)**

Ponieważ prosta o równaniu  $x = 7$  jest osią symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji  $f$ , więc wzór funkcji możemy zapisać w postaci kanonicznej

$$f(x) = (x - 7)^2 + q.$$

Punkt  $A = (0, -5)$  leży na tym wykresie, więc  $f(0) = -5$ , czyli

$$\begin{aligned} -5 &= (0 - 7)^2 + q, \\ -5 &= 49 + q, \\ q &= -54. \end{aligned}$$

Zatem  $f(x) = (x - 7)^2 - 54$ . Przekształcając tę postać kanoniczną do postaci ogólnej, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 14x + 49 - 54, \\ f(x) &= x^2 - 14x - 5. \end{aligned}$$

Odpowiedź. Wartości współczynników  $b$  i  $c$  są równe:  $b = -14$ ,  $c = -5$ .

**Rozwiązanie (III sposób)**

Ponieważ prosta o równaniu  $x = 7$  jest osią symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji  $f$ , więc jeśli punkt  $A = (0, -5)$  leży na tej paraboli, to jego obraz w symetrii osiowej względem tej prostej również leży na tej paraboli. Obrazem punktu  $A = (0, -5)$  w tej symetrii jest punkt  $A' = (14, -5)$ .

Zatem  $f(0) = -5$  i  $f(14) = -5$ , czyli

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 0^2 + b \cdot 0 + c = -5 \\ 14^2 + b \cdot 14 + c = -5 \end{cases}, \\ &\begin{cases} c = -5 \\ 14^2 + 14b - 5 = -5 \end{cases}, \\ &\begin{cases} c = -5 \\ 14b = -14^2 \end{cases}, \\ &\begin{cases} c = -5 \\ b = -14 \end{cases}. \end{aligned}$$

Odpowiedź. Wartości współczynników  $b$  i  $c$  są równe:  $b = -14$ ,  $c = -5$ .

**Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy

- obliczy wartość współczynnika  $b$ :  $b = -14$

albo

- obliczy lub poda wartość współczynnika  $c$ :  $c = -5$

albo

- zapisze układ równań z niewiadomymi  $b$  i  $c$ :  $0^2 + b \cdot 0 + c = -5$  i  $14^2 + b \cdot 14 + c = -5$

albo

- zapisze wzór funkcji  $f$  w postaci  $f(x) = (x-7)^2 + q$  oraz równanie  $-5 = (0-7)^2 + q$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy obliczy wartości współczynników  $b$  i  $c$ :  $b = -14$ ,  $c = -5$ .

### Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że reszta z dzielenia sumy kwadratów czterech kolejnych liczb naturalnych przez 8 jest równa 6.

#### Rozwiązanie

Niech  $n$ ,  $n+1$ ,  $n+2$ ,  $n+3$  będą czterema kolejnymi liczbami naturalnymi. Sumujemy kwadraty tych liczb i odpowiednio tę sumę porządkujemy:

$$\begin{aligned} n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 &= 4n^2 + 12n + 14 = \\ &= 4n^2 + 12n + 8 + 6 = 4(n^2 + 3n + 2) + 6 = 4(n+1)(n+2) + 6 \end{aligned}$$

Oczywiście liczba postaci  $4(n+1)(n+2)$  jest podzielna przez 4. Ponadto  $n+1$  i  $n+2$  to dwie kolejne liczby całkowite, więc jedna z nich jest parzysta. Zatem iloczyn  $4(n+1)(n+2)$  jest podzielny przez 4 i przez 2, czyli jest podzielny przez 8. Stąd wynika, że liczba  $4(n+1)(n+2) + 6$  przy dzieleniu przez 8 daje resztę równą 6. To kończy dowód.

#### Schemat oceniania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy zapisze sumę kwadratów czterech kolejnych liczb naturalnych w postaci:

$$4(n^2 + 3n + 2) + 6$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

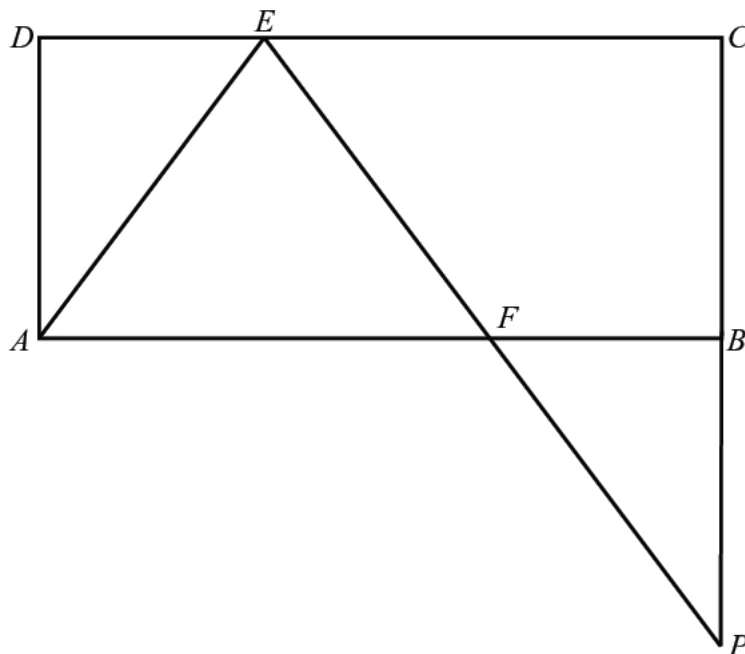
**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

#### Uwaga:

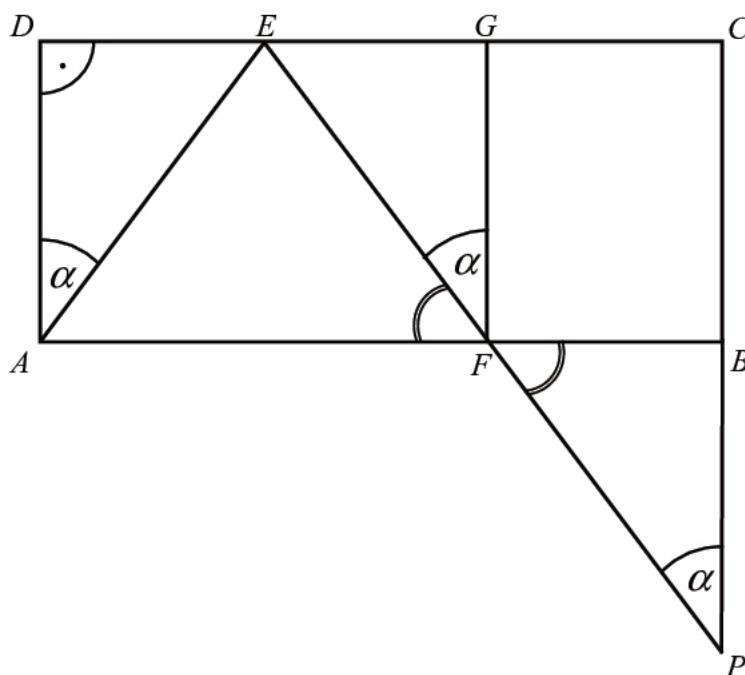
Jeśli zdający sprawdza prawdziwość twierdzenia dla sumy kwadratów konkretnych czterech liczb naturalnych, to otrzymuje **0 punktów**.

**Zadanie 29. (0–2)**

Dany jest prostokąt  $ABCD$ . Na boku  $CD$  tego prostokąta wybrano taki punkt  $E$ , że  $|EC| = 2|DE|$ , a na boku  $AB$  wybrano taki punkt  $F$ , że  $|BF| = |DE|$ . Niech  $P$  oznacza punkt przecięcia prostej  $EF$  z prostą  $BC$  (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąty  $AED$  i  $FPB$  są przystające.

**Rozwiązanie (I sposób)** „cecha kąt-bok-kąt przystawania”

Dorysowujemy odcinek  $FG$ , taki że punkt  $G$  jest środkiem odcinka  $EC$ . Ponieważ  $|EC| = 2|DE|$ , więc otrzymujemy równość  $|DE| = |EG| = |GC|$ .



Schemat oceniania  
Poziom podstawowy

Zatem  $|GC| = |FB|$ , a skoro  $|\angle GCB| = |\angle FBC| = 90^\circ$ , więc  $|\angle FGC| = 90^\circ$ , skąd wynika, że trójkąt  $FEG$  jest prostokątny.

Ponieważ  $|AD| = |FG|$ ,  $|\angle ADE| = |\angle FGE| = 90^\circ$  i  $|DE| = |EG|$ , więc z cechy *bbk* wnioskujemy, że trójkąty  $AED$  i  $FEG$  są przystające. Niech  $|\angle DAE| = \alpha$ . Wtedy z przystawania tych trójkątów wnosimy, że  $|\angle EFG| = \alpha$ . Ponieważ odcinki  $PC$  i  $FG$  są równoległe, więc  $|\angle FPB| = |\angle EFG| = \alpha$  (kąty odpowiadające).

Ponieważ  $|\angle FPB| = |\angle EFG| = \alpha$ ,  $|BF| = |DE|$ ,  $|\angle PBF| = 90^\circ = |\angle ADE|$  oraz, zatem na mocy cechy *bbk* trójkąty  $AED$  i  $PFB$  są przystające.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy uzasadni, że trójkąty  $AED$  i  $FEG$  są trójkątami przystającymi i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

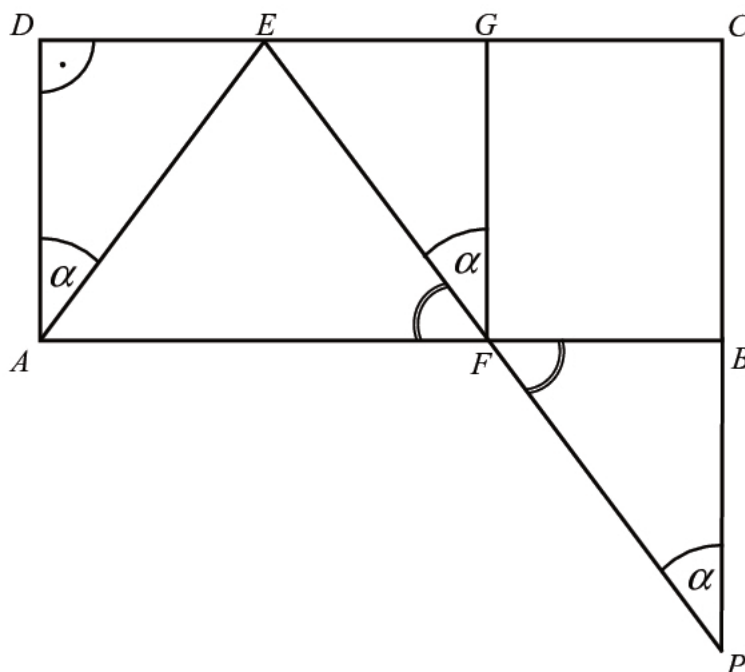
**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

**Uwaga:**

Jeżeli zdający wprowadza do zadania dodatkowe założenia niewynikające z treści tego zadania i korzysta z tych założeń, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**Rozwiązanie (II sposób) – „przechodniość przystawania”**

Dorysowujemy odcinek  $FG$ , taki, że punkt  $G$  jest środkiem odcinka  $EC$ . Ponieważ  $|EC| = 2|DE|$ , więc otrzymujemy równość  $|DE| = |EG| = |GC|$ .



Zatem  $|GC| = |FB|$ , a skoro  $|\angle GCB| = |\angle FBC| = 90^\circ$ , więc  $|\angle FGC| = 90^\circ$ , skąd wynika, że trójkąt  $FEG$  jest prostokątny.

Schemat oceniania  
Poziom podstawowy

Ponieważ  $|AD|=|FG|$ ,  $|\sphericalangle ADE|=|\sphericalangle FGE|=90^\circ$  i  $|DE|=|EG|$ , więc z cechy *bbk* wnioskujemy, że trójkąty  $AED$  i  $FEG$  są przystające.

Niech  $|\sphericalangle DAE|=\alpha$ . Zatem  $|\sphericalangle EFG|=\alpha$ . Ponieważ  $FG\parallel PC$ , więc  $|\sphericalangle FPB|=\alpha=|\sphericalangle EFG|$ .

Trójkąty  $EFG$  i  $FPB$  są trójkątami przystającymi na mocy cechy *bbk*, gdyż są to trójkąty prostokątne, mają jeden kąt ostry równej miary oraz  $|BF|=|EG|$ . Skoro trójkąt  $AED$  jest przystający do trójkąta  $FEG$ , a trójkąt  $FEG$  jest przystający do trójkąta  $FPB$ , więc z przechodniości relacji przystawania wynika, że trójkąty  $AED$  i  $PBF$  są przystające.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy uzasadni, że trójkąty  $AED$  i  $FEG$  są trójkątami przystającymi i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

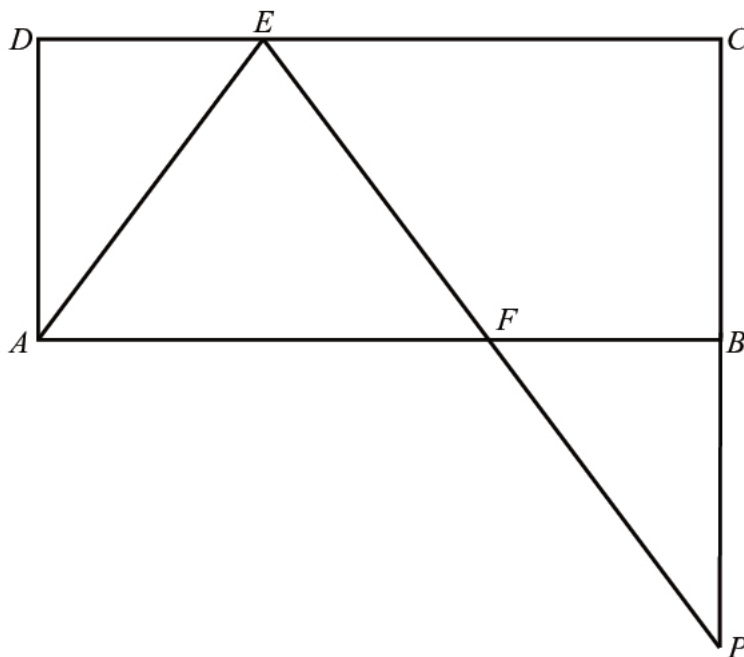
**Uwaga:**

Jeżeli zdający wprowadza do zadania dodatkowe założenia niewynikające z treści tego zadania

i korzysta z tych założeń, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**Rozwiązanie (III sposób) – „podobieństwo trójkątów”**

Trójkąty  $PBF$  i  $PCE$  są podobne na podstawie cechy *kkk*, bo są to trójkąty prostokątne i kąt  $FPB$  jest wspólnym kątem obu tych trójkątów.



Skala podobieństwa tych trójkątów jest równa 2, gdyż z treści zadania wiadomo, że  $|BF|=|DE|$  oraz  $|EC|=2|DE|$ . Wynika stąd, że  $|CP|=2|BP|$ , a zatem  $|PB|=|BC|=|AD|$ .

Ponieważ zachodzą równości

$$|PB|=|AD|, |\sphericalangle PBF|=90^\circ=|\sphericalangle ADE|, |BF|=|DE|,$$

więc trójkąty  $AED$  i  $PBF$  są przystające na mocy cechy *bbk* przystawania trójkątów.

To kończy dowód.

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania****Zdający otrzymuje ..... 1 p.**gdy uzasadni, że trójkąty  $PBF$  i  $PCE$  są trójkątami podobnymi i skala podobieństwa tych trójkątów

jest równa 2 i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy przeprowadzi pełne, poprawne rozumowanie.

**Uwaga:**

Jeżeli zdający wprowadza do zadania dodatkowe założenia niewynikające z treści tego zadania

i korzysta z tych założeń, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.**Zadanie 30. (0–2)**Kąt  $\alpha$  jest ostry i  $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$ . Oblicz wartość wyrażenia  $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ .**Rozwiązanie I sposób**Równanie  $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$  podnosimy obustronnie do kwadratu $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2$ , a następnie korzystając z tożsamości  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ otrzymujemy  $1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2$ , zatem  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$ .Następnie korzystamy ze związku między funkcjami tego samego kąta  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ i przekształcamy wyrażenie  $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ :

$$\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

**Schemat oceniania****Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy

- przekształci wyrażenie  $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$  do postaci  $\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$

albo

- wyznaczy wartość wyrażenia  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**gdy obliczy wartość wyrażenia  $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ : 2.

**Rozwiązanie II sposób**

Z równania  $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$  wyznaczamy jedną z funkcji trygonometrycznych w zależności od drugiej, np. sinus kąta w zależności od cosinusa kąta:  $\sin \alpha = \sqrt{2} - \cos \alpha$ . Następnie korzystając z tożsamości  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  otrzymujemy:

$$(\sqrt{2} - \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1, \text{ stąd otrzymujemy równanie kwadratowe}$$

$$2 \cos^2 \alpha - 2\sqrt{2} \cos \alpha + 1 = 0.$$

Równanie można zapisać w postaci  $(\sqrt{2} \cos \alpha - 1)^2 = 0$ ,

zatem rozwiązaniem tego równania jest  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\text{Stąd } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Następnie korzystamy ze związku między funkcjami tego samego kąta  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

i przekształcamy wyrażenie  $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ .

$$\text{Otrzymujemy } \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2.$$

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje .....1 p.**  
gdy

- przekształci wyrażenie  $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$  do postaci  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ,

albo

- wyznaczy wartość  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$  i  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje .....2 p.**

gdy obliczy wartość wyrażenia  $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} : 2$ .

**Zadanie 31. (0–2)**

Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Po przeprowadzonym doświadczeniu zapisujemy liczbę uzyskanych orłów (od 0 do 4) i liczbę uzyskanych reszek (również od 0 do 4). Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tych czterech rzutach liczba uzyskanych orłów będzie większa niż liczba uzyskanych reszek.

**Rozwiązanie (I sposób)**

Zbiór zdarzeń elementarnych tego doświadczenia losowego zawiera wszystkie ciągi czteroelementowe, postaci  $(r_1, r_2, r_3, r_4)$ , w których  $r_i$  oznacza wyrzucenie orła (O) albo

*Schemat oceniania*  
*Poziom podstawowy*

wyrzucenie reszki ( $R$ ) w  $i$ -tym rzucie, dla  $i = 1, 2, 3, 4$ . Jest to model klasyczny i liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega| = 2^4 = 16.$$

Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na tym, że w tych czterech rzutach wypadnie więcej orłów niż reszek. Oznacza to, że otrzymamy cztery orły albo trzy orły i jedną reszkę.

Zdarzeniu  $A$  sprzyja zatem 5 zdarzeń elementarnych:

$$(O, O, O, R), (O, O, R, O), (O, R, O, O), (R, O, O, O), (O, O, O, O).$$

Szukane prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $A$  jest więc równe:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{16}.$$

### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy:

zapisze, że liczba wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia jest równa  $2^4 = 16$

albo

wypisze poprawnie 5 zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia  $A$   
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

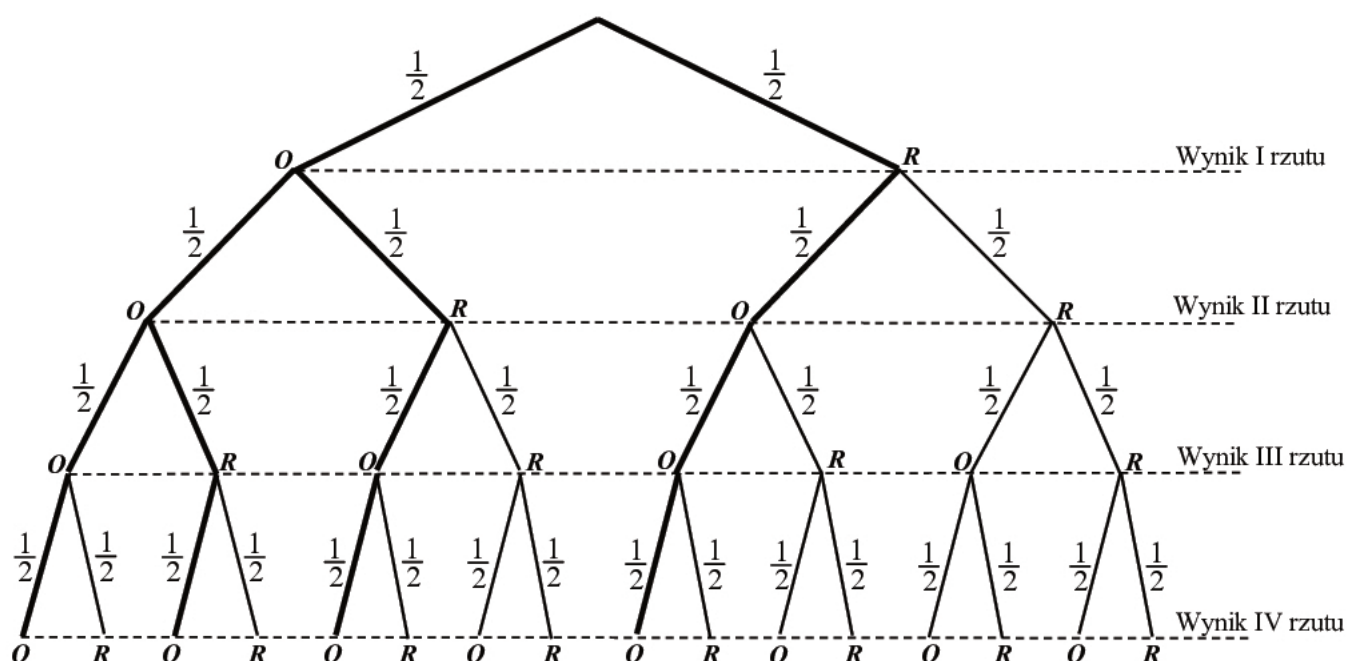
**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy obliczy i zapisze, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $A$  jest równe  $\frac{5}{16}$ .

### Uwaga:

Jeżeli zdający błędnie zapisze wynik  $P(A)$  jako liczbę większą od 1 lub mniejszą od 0, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

### Rozwiązanie (II sposób) „metoda drzewka”

Rysujemy czteroetapowe drzewko ilustrujące dane doświadczenie.



Schemat oceniania  
Poziom podstawowy

Niech  $A$  oznacza zdarzenie polegające na tym, że w tych czterech rzutach wypadnie więcej orłów niż reszek. Zaznaczamy (linia pogrubiona) wszystkie gałęzie, które dotyczą szukanego zdarzenia, czyli ciągów:

$$(O, O, O, O), (O, O, O, R), (O, O, R, O), (O, R, O, O), (R, O, O, O).$$

Zatem szukane prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $A$  jest równe:

$$P(A) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16}.$$

### Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy narysuje drzewko tego doświadczenia (**wystarczy istotnych 5 gałęzi**) oraz przynajmniej wzdłuż jednej gałęzi wpisze poprawnie prawdopodobieństwa i na tym zakończy lub dalej popęlnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy obliczy i zapisze, że prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia  $A$  jest równe  $\frac{5}{16}$ .

### Uwaga:

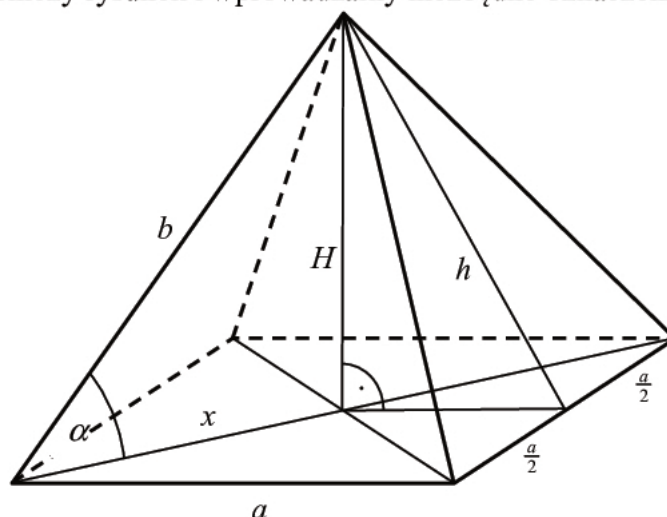
Jeżeli zdający błędnie zapisze wynik  $P(A)$  jako liczbę większą od 1 lub mniejszą od 0, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

### Zadanie 32. (0–5)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości  $H = 16$ . Cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa jest równy  $\frac{3}{5}$ . Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

### Rozwiązanie (I sposób)

Sporządzamy pomocniczy rysunek i wprowadzamy niezbędne oznaczenia.



Obliczymy długości dwóch boków trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej  $b$  oraz przyprostokątnych długości 16 i  $x$ . Zapisujemy w tym celu układ równań:

$$x^2 + 16^2 = b^2 \text{ i } \cos \alpha = \frac{x}{b} = \frac{3}{5}.$$

Następnie zapisujemy równanie z jedną niewiadomą, np.  $\left(\frac{3}{5}b\right)^2 + 16^2 = b^2$ , skąd wynika, że  $b = 20$ .

A zatem  $x = 12$ . Teraz obliczamy długość krawędzi podstawy ostrosłupa:  $\frac{a\sqrt{2}}{2} = 12$ , stąd

$a = 12\sqrt{2}$ . Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość ściany bocznej:

$h^2 + (6\sqrt{2})^2 = 20^2$ , stąd  $h = 2\sqrt{82}$ . Obliczamy wreszcie pole powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} ah = 48\sqrt{164} = 96\sqrt{41}.$$

### Rozwiązanie (II sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku w I sposobie rozwiązania. Obliczamy długości dwóch boków trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej  $b$  oraz przyprostokątnych długości 16 oraz  $x$ . Tym razem obliczymy sinus kąta  $\alpha$ ,  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , a następnie zapisujemy zależność

$\frac{4}{5} = \frac{16}{b}$ , z której otrzymujemy  $b = 20$ . Następnie, korzystając z twierdzenia Pitagorasa,

zapisujemy równanie  $x^2 + 16^2 = 20^2$ , a stąd  $x = 12$ . Teraz obliczamy długość krawędzi podstawy ostrosłupa:  $a\sqrt{2} = 24$ , stąd  $a = 12\sqrt{2}$ . Korzystając ponownie

z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość ściany bocznej:  $h^2 + (6\sqrt{2})^2 = 20^2$ , stąd  $h = 2\sqrt{82}$ . Obliczamy pole powierzchni bocznej ostrosłupa

$$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} ah = 48\sqrt{164} = 96\sqrt{41}.$$

### Rozwiązanie (III sposób)

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku w I sposobie rozwiązania. Najpierw obliczymy długość boku  $x$  trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej  $b$  oraz przyprostokątnych długości  $x$  i 16. Korzystamy z faktu, że  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  i obliczamy najpierw sinus, a następnie

tangens kąta  $\alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ . Teraz zapisujemy zależność  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{x} = \frac{16}{x}$ , z której wynika, że

$\frac{16}{x} = \frac{4}{3}$ , czyli  $x = 12$ . Następnie z równości  $a\sqrt{2} = 24$  obliczamy długość krawędzi podstawy

$a = 12\sqrt{2}$ . Wreszcie z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość ściany bocznej ostrosłupa:

$h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$  i stąd  $h = 2\sqrt{82}$ . Szukane pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest zatem

równe  $P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} ah = 48\sqrt{164} = 96\sqrt{41}$ .

### Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.**

Zdający:

- zapisze równość wynikającą z treści zadania oraz z definicji cosinusa kąta ostrego, np.

$$\frac{x}{b} = \frac{3}{5}$$

albo

- zapisze równość wynikającą z treści zadania oraz twierdzenia Pitagorasa  $x^2 + 16^2 = b^2$ ,  
albo
- obliczy sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa,  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

albo

- obliczy tangens kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa,  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą:

- $\left(\frac{3}{5}b\right)^2 + 16^2 = b^2$

albo

- $\frac{4}{5} = \frac{16}{b}$

albo

- $\frac{16}{x} = \frac{4}{3}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**Zdający obliczy długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa  $a = 12\sqrt{2}$ 

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 4 p.**Zdający obliczy wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa  $h = 2\sqrt{82}$ 

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 5 p.**

Zdający obliczy i zapisze, że pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe

$$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} ah = 48\sqrt{164} = 96\sqrt{41}.$$

**Uwagi:**

1. Akceptujemy poprawnie zastosowane zaokrąglenia liczb rzeczywistych.
2. Jeżeli zdający założy, że  $x = 3$  oraz  $b = 5$  i doprowadzi rozwiązanie do końca otrzymując

$$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} ah = 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = 6\sqrt{14},$$

to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.

3. Jeżeli zdający przyjmuje, że podany kąt jest kątem nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy, otrzymując  $a = 12$  oraz  $h = 20$  i obliczy pole powierzchni bocznej  $P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} ah = 2 \cdot 24 \cdot 20 = 960$ , to za takie rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

4. Jeżeli zdający przyjmuje, że powierzchnia boczna tego ostrosłupa jest trójkątem równobocznym, to za takie rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

5. Jeżeli zdający zapisuje błędną zależność wynikającą z definicji cosinusa danego kąta, to za całe rozwiązanie może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.
6. Jeżeli zdający popełnia błędy nieprzekreślające poprawności rozumowania, np.: błędy rachunkowe, błędy w przepisywaniu, itp. i doprowadza rozwiązanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać maksymalnie **4 punkty**.

**Zadanie 33. (0-4)**

W ciągu arytmetycznym  $(a_n)$ , określonym dla liczb naturalnych  $n \geq 1$ , wyraz szósty jest liczbą dwa razy większą od wyrazu piątego, a suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa  $S_{10} = \frac{15}{4}$ . Oblicz wyraz pierwszy oraz różnicę tego ciągu.

**Rozwiązanie (I sposób)**

Oznaczmy rozpatrywany ciąg arytmetyczny przez  $(a_n)$ , gdzie  $n \geq 1$ , a różnicę tego ciągu przez  $r$ .

Zapisujemy zależność między wyrazami piątym i szóstym:  $a_6 = 2a_5$ . Stąd

$$a_1 + 5r = 2(a_1 + 4r), \text{ czyli } a_1 = -3r.$$

Zapisujemy kolejną zależność

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{15}{4},$$

a stąd

$$5(2a_1 + 9r) = \frac{15}{4}, \text{ czyli } 2a_1 + 9r = \frac{3}{4}.$$

Zapisujemy równanie z jedną niewiadomą,  $2 \cdot (-3r) + 9r = \frac{3}{4}$ , skąd otrzymujemy  $r = \frac{1}{4}$ .

Ostatecznie więc  $r = \frac{1}{4}$  i  $a_1 = -\frac{3}{4}$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.**

Zdający zapisze równanie z dwiema niewiadomymi  $a_1$  i  $r$ , np.

$$a_1 + 5r = 2(a_1 + 4r) \text{ lub } \frac{2a_1 + 9r}{2} \cdot 10 = \frac{15}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający zapisze dwa równania z dwiema niewiadomymi  $a_1$  i  $r$ ,

$$\text{np. } a_1 + 5r = 2(a_1 + 4r) \text{ i } \frac{2a_1 + 9r}{2} \cdot 10 = \frac{15}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą np.  $2 \cdot (-3r) + 9r = \frac{3}{4}$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy i zapisze, że  $r = \frac{1}{4}$  i  $a_1 = -\frac{3}{4}$ .

**Uwaga:**

Jeżeli zdający popełnia błędy nieprzekreślające poprawności rozumowania, np.: błędy rachunkowe, błędy w przepisywaniu, itp. i doprowadza rozwiązanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Oznaczmy rozpatrywany ciąg arytmetyczny przez  $(a_n)$ , gdzie  $n \geq 1$ , a różnicę tego ciągu przez  $r$ .

Zapisujemy zależność między wyrazami piątym i szóstym:  $a_6 = 2a_5$ . Stąd  $a_5 + r = 2a_5$ , czyli  $a_5 = r$ .

Zauważamy, że

$$a_1 = a_5 - 4r \text{ oraz } a_{10} = a_5 + 5r$$

i zapisujemy kolejną zależność

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{a_5 - 4r + a_5 + 5r}{2} \cdot 10 = \frac{15}{4}.$$

Po uwzględnieniu zależności  $a_5 = r$ , mamy

$$\frac{-3r + 6r}{2} \cdot 10 = \frac{15}{4}, \text{ czyli } r = \frac{1}{4}.$$

Stąd wynika, że  $a_1 = a_5 - 4r = r - 4r = -3r = -3 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym postęp jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający zapisze równanie z dwiema niewiadomymi  $a_5$  i  $r$ , np.

$$a_5 + r = 2a_5 \text{ lub równanie } \frac{a_5 - 4r + a_5 + 5r}{2} \cdot 10 = \frac{15}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający zapisze dwa równania z dwiema niewiadomymi  $a_5$  i  $r$ ,

$$\text{np. } a_5 + r = 2a_5 \text{ i równanie } \frac{a_5 - 4r + a_5 + 5r}{2} \cdot 10 = \frac{15}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą np.

$$\frac{-3r + 6r}{2} \cdot 10 = \frac{15}{4} \text{ lub } a_5 + \left( \frac{3}{4} - 2a_5 \right) = 2a_5$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy i zapisze, że  $r = \frac{1}{4}$  i  $a_1 = -\frac{3}{4}$ .

**Uwaga:**

Jeżeli zdający popełnia błędy nieprzekreślające poprawności rozumowania, np.: błędy rachunkowe, błędy w przepisaniu, itp. i doprowadza rozwiązanie konsekwentnie do końca, to może otrzymać maksymalnie **3 punkty**.

**Zadanie 34. (0-4)**

Punkty  $A = (-1, 1)$  i  $C = (1, 9)$  są wierzchołkami trójkąta równoramiennego  $ABC$ , w którym  $|AC| = |BC|$ . Podstawa  $AB$  tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ . Oblicz współrzędne wierzchołka  $B$  tego trójkąta.

**Rozwiązanie (I sposób)**

Prosta przechodząca przez punkt  $C = (1, 9)$  i prostopadła do prostej  $AB$  zawiera wysokość  $CD$  trójkąta  $ABC$ . Współczynnik kierunkowy  $a_{CD}$  tej prostej jest równy

$$a_{CD} = -\frac{1}{a_{AB}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

Zatem prosta  $CD$  ma równanie postaci

$$y = -2(x - 1) + 9,$$

$$y = -2x + 11.$$

Obliczmy współrzędne spodka  $D$  wysokości  $CD$ , rozwiązując układ równań

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{ oraz } y = -2x + 11.$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = -2x + 11,$$

$$\frac{5}{2}x = \frac{19}{2},$$

$$x = \frac{19}{5}.$$

Zatem  $y = -2 \cdot \frac{19}{5} + 11 = \frac{17}{5}$ , więc  $D = \left(\frac{19}{5}, \frac{17}{5}\right) = \left(3\frac{4}{5}, 3\frac{2}{5}\right) = (3, 8; 3, 4)$ .

Ponieważ trójkąt  $ABC$  jest równoramienny i  $|AC| = |BC|$ , więc punkt  $D$  jest środkiem podstawy  $AB$  tego trójkąta. Ze wzorów na współrzędne środka odcinka otrzymujemy

$$\frac{x_A + x_B}{2} = x_D \text{ oraz } \frac{y_A + y_B}{2} = y_D,$$

$$\frac{-1 + x_B}{2} = \frac{19}{5} \text{ oraz } \frac{1 + y_B}{2} = \frac{17}{5},$$

$$x_B = \frac{43}{5} = 8\frac{3}{5} \text{ oraz } y_B = \frac{29}{5} = 5\frac{4}{5}.$$

Zatem  $B = \left(\frac{43}{5}, \frac{29}{5}\right) = \left(8\frac{3}{5}, 5\frac{4}{5}\right)$ .

**Uwaga**

Zdający może wyznaczyć współrzędne punktu  $B$ , korzystając z równości wektorów:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{AD} = \left[\frac{19}{5} + 1, \frac{17}{5} - 1\right] = \left[\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right] \text{ i } \overrightarrow{DB} = \left[x_B - \frac{19}{5}, y_B - \frac{17}{5}\right]$$

$$x_B = \frac{19}{5} + \frac{24}{5} = \frac{43}{5} = 8\frac{3}{5} \text{ oraz } y_B = \frac{12}{5} + \frac{17}{5} = \frac{29}{5} = 5\frac{4}{5}.$$

**Rozwiązanie (II sposób)**

Punkt  $B$  leży na prostej o równaniu  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ , więc współrzędne tego punktu można zapisać w postaci  $B = (x_B, \frac{1}{2}x_B + \frac{3}{2})$ .

Równość  $|AC| = |BC|$  możemy, korzystając ze wzoru na długość odcinka, zapisać w postaci

$$\sqrt{(1 - (-1))^2 + (9 - 1)^2} = \sqrt{(1 - x_B)^2 + \left(9 - \left(\frac{1}{2}x_B + \frac{3}{2}\right)\right)^2},$$

$$(\sqrt{68})^2 = \left( \sqrt{(1 - x_B)^2 + \left(9 - \left(\frac{1}{2}x_B + \frac{3}{2}\right)\right)^2} \right)^2,$$

$$68 = (1 - x_B)^2 + \left(\frac{15}{2} - \frac{1}{2}x_B\right)^2,$$

$$68 = 1 - 2x_B + x_B^2 + \frac{225}{4} - \frac{15}{2}x_B + \frac{1}{4}x_B^2,$$

$$\frac{5}{4}x_B^2 - \frac{19}{2}x_B - \frac{43}{4} = 0,$$

$$5x_B^2 - 38x_B - 43 = 0.$$

$$\Delta = (-38)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-43) = 2304, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{2304} = 48,$$

$$x_B = \frac{38 - 48}{2 \cdot 5} = -1 \quad \text{lub} \quad x_B = \frac{38 + 48}{2 \cdot 5} = \frac{86}{10} = \frac{43}{5} = 8\frac{3}{5}.$$

Pierwsze z otrzymanych rozwiązań to współrzędna wierzchołka  $A$ , zatem  $x_B = \frac{43}{5} = 8\frac{3}{5}$ , więc współrzędne punktu  $B$  są równe

$$B = \left(\frac{43}{5}, \frac{1}{2} \cdot \frac{43}{5} + \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{43}{5}, \frac{43+15}{10}\right) = \left(\frac{43}{5}, \frac{58}{10}\right) = \left(\frac{43}{5}, \frac{29}{5}\right) = \left(8\frac{3}{5}, 5\frac{4}{5}\right).$$

**Rozwiązanie (III sposób)**

Punkt  $B$  jest punktem przecięcia okręgu o środku w punkcie  $C$  i promieniu  $|AC|$  z prostą  $AB$  o równaniu  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ .

Obliczamy długość promienia okręgu

$$r = |AC| = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (9 - 1)^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

Zatem równanie okręgu możemy zapisać w postaci

$$(x - 1)^2 + (y - 9)^2 = 68.$$

Współrzędne punktu  $B$  obliczamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 9)^2 = 68 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(x - 1)^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - 9\right)^2 = 68$$

*Schemat oceniania*  
*Poziom podstawowy*

$$(x-1)^2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{15}{2}\right)^2 = 68$$

$$x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{225}{4} = 68,$$

$$5x^2 - 38x - 43 = 0,$$

$$\Delta = (-38)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-43) = 2304, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{2304} = 48,$$

$$x = \frac{38-48}{2 \cdot 5} = -1 \quad \text{lub} \quad x = \frac{38+48}{2 \cdot 5} = \frac{86}{10} = \frac{43}{5} = 8\frac{3}{5}.$$

Pierwsze z otrzymanych rozwiązań to współrzędna wierzchołka  $A$ , zatem  $x_B = \frac{43}{5} = 8\frac{3}{5}$ , więc współrzędne punktu  $B$  są równe

$$B = \left(\frac{43}{5}, \frac{1}{2} \cdot \frac{43}{5} + \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{43}{5}, \frac{43+15}{10}\right) = \left(\frac{43}{5}, \frac{58}{10}\right) = \left(\frac{43}{5}, \frac{29}{5}\right) = \left(8\frac{3}{5}, 5\frac{4}{5}\right).$$

**Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego**

**rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- zapisze, że spodek  $D$  wysokości  $CD$  jest środkiem boku  $AB$  trójkąta  $ABC$

albo

- zapisze równanie prostej  $CD$ :  $y = -2x + 11$

albo

- zapisze współrzędne punktu  $B$  w zależności od jednej zmiennej, np.:  $B = \left(x_B, \frac{1}{2}x_B + \frac{3}{2}\right)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- zapisze równanie okręgu o środku w punkcie  $C$  i promieniu  $|AC|$ , np.:

$(x-1)^2 + (y-9)^2 = 68$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- obliczy współrzędne spodka  $D$  wysokości  $CD$  trójkąta  $ABC$ :  $D = \left(\frac{19}{5}, \frac{17}{5}\right)$

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.:  $(\sqrt{68})^2 = \left(\sqrt{(1-x_B)^2 + \left(9 - \left(\frac{1}{2}x_B + \frac{3}{2}\right)\right)^2}\right)^2$

albo

- zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} \sqrt{(1-x_B)^2 + (9-y_B)^2} = \sqrt{68} \\ y_B = \frac{1}{2}x_B + \frac{3}{2} \end{cases}$$

albo

- zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi (równanie okręgu i prostej):

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-9)^2 = 68 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... 3 p.**

Zdający

- zapisze układ równań pozwalający obliczyć współrzędne wierzchołka  $B$ , np.:

$$\frac{-1+x_B}{2} = \frac{19}{5} \text{ oraz } \frac{1+y_B}{2} = \frac{17}{5}$$

albo

- zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą w postaci uporządkowanej, np.:

$$5x_B^2 - 38x_B - 43 = 0.$$

albo

- zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą w postaci uporządkowanej, np.:

$$\frac{5}{4}x^2 - \frac{19}{2}x - \frac{43}{4} = 0$$

albo

- zapisze równość wektorów pozwalającą obliczyć współrzędne wierzchołka  $B$ , np.:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} \text{ oraz } \overrightarrow{AD} = \left[ \frac{24}{5}, \frac{12}{5} \right] \text{ i } \overrightarrow{DB} = \left[ x_B - \frac{19}{5}, y_B - \frac{17}{5} \right].$$

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**Zdający obliczy współrzędne wierzchołka  $B$ :  $B = \left( 8\frac{3}{5}, 5\frac{4}{5} \right).$