

|                                   |                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Rodzaj dokumentu:</i>          | <b>Zasady oceniania rozwiązań zadań</b>                                                                                                                                |
| <i>Egzamin:</i>                   | <b>Egzamin maturalny<br/>Test diagnostyczny</b>                                                                                                                        |
| <i>Przedmiot:</i>                 | <b>Matematyka</b>                                                                                                                                                      |
| <i>Poziom:</i>                    | <b>Poziom podstawowy</b>                                                                                                                                               |
| <i>Formy arkusza:</i>             | EMAP-P0- <b>100</b> -2103, EMAP-P0- <b>200</b> -2103,<br>EMAP-P0- <b>300</b> -2103, EMAP-P0- <b>400</b> -2103,<br>EMAP-P0- <b>700</b> -2103, EMAP-P0- <b>Q00</b> -2103 |
| <i>Termin egzaminu:</i>           | 4 marca 2021 r.                                                                                                                                                        |
| <i>Data publikacji dokumentu:</i> | 5 marca 2021 r.                                                                                                                                                        |

*Uwaga: Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.*

Gdy wymaganie egzaminacyjne dotyczy treści z III etapu edukacyjnego – dopisano „G”.

### Zadanie 1. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021 <sup>1</sup>          |                                                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                   | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                                                          |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>1.1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach [...] z użyciem symboli pierwiastków, potęg;<br>2.1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ . |

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

A

### Zadanie 2. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021                       |                                                                                                                                                                    |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                   | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                              |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>1.6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym. |

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

B

<sup>1</sup> Załącznik nr 2 do rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 20 marca 2020 r. w sprawie szczególnych rozwiązań w okresie czasowego ograniczenia funkcjonowania jednostek systemu oświaty w związku z zapobieganiem, przeciwdziałaniem i zwalczaniem COVID-19 (Dz.U. poz. 493, z późn. zm.).

### Zadanie 3. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021             |                                                        |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                         | Wymaganie szczegółowe                                  |
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | Zdający:<br>1.8) wykonuje obliczenia procentowe [...]. |

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

### Zadanie 4. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021                       |                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                   | Wymaganie szczegółowe                                                                                                    |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>1.4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych. |

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

B

### Zadanie 5. (0–1)

| Wymagania egzaminacyjne 2021             |                                                                                                                            |
|------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                         | Wymaganie szczegółowe                                                                                                      |
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | Zdający:<br>G7.5) sprawdza, czy dana para liczb spełnia układ dwóch równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi [...]. |

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

B

**Zadanie 6. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021             |                                                                                                          |
|------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                         | Wymaganie szczegółowe                                                                                    |
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | Zdający:<br>3.6) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu<br>$x(x + 1)(x - 7) = 0$ . |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

B

**Zadanie 7. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021             |                                                                                      |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                         | Wymaganie szczegółowe                                                                |
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | Zdający:<br>3.3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą [...]. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

D

**Zadanie 8. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021             |                                                                                     |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                         | Wymaganie szczegółowe                                                               |
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | Zdający:<br>4.7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

C

**Zadanie 9. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021             |                                                               |
|------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                         | Wymaganie szczegółowe                                         |
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | Zdający:<br>4.3) odczytuje z wykresu własności funkcji [...]. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

D

**Zadanie 10. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021                       |                                                                               |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                   | Wymaganie szczegółowe                                                         |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>4.2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu [...]. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

B

**Zadanie 11. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021   |                                                                            |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne               | Wymaganie szczegółowe                                                      |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>5.4) stosuje wzór na $n$ -ty wyraz [...] ciągu geometrycznego. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

C

**Zadanie 12. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021   |                                                                            |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne               | Wymaganie szczegółowe                                                      |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>5.3) stosuje wzór na $n$ -ty wyraz [...] ciągu arytmetycznego. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

C

**Zadanie 13. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021      |                                                                              |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                  | Wymaganie szczegółowe                                                        |
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | Zdający:<br>7.1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

A

**Zadanie 14. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021                       |                                                               |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                   | Wymaganie szczegółowe                                         |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>5.2) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny [...]. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

B

**Zadanie 15. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021   |                                                                    |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne               | Wymaganie szczegółowe                                              |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>5.1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

D

**Zadanie 16. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021   |                                                                                                                                                                                                 |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne               | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                                                                           |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

D

**Zadanie 17. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021                       |                                                                                           |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                   | Wymaganie szczegółowe                                                                     |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>7.3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

A

**Zadanie 18. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021                       |                                                                                                |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                   | Wymagania szczegółowe                                                                          |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>8.5) wyznacza współrzędne środka odcinka;<br>8.6) oblicza odległość dwóch punktów. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

B

**Zadanie 19. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021                       |                                                                                                                              |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                   | Wymaganie szczegółowe                                                                                                        |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>6.4) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

D



**Zadanie 20. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021                       |                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                   | Wymaganie szczegółowe                                                                                                           |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>6.1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji [...] tangens kątów o miarach od $0^\circ$ do $180^\circ$ . |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

A

**Zadanie 21. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021                       |                                                                                                    |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                   | Wymaganie szczegółowe                                                                              |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>8.2) bada równoległość i prostokątowość prostych na podstawie ich równań kierunkowych. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

B

**Zadanie 22. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021                       |                                                                                                                                                            |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                   | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                                      |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>8.3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzącej przez dany punkt. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

C

**Zadanie 23. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021   |                                                                                                               |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne               | Wymaganie szczegółowe                                                                                         |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>7.4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych [...]. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

B

**Zadanie 24. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021   |                                                                              |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne               | Wymaganie szczegółowe                                                        |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>G11.2) oblicza pole powierzchni i objętość graniastopu prostego. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

A

**Zadanie 25. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021   |                                                                          |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne               | Wymaganie szczegółowe                                                    |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>G11.2) oblicza pole powierzchni i objętość [...] ostrosłupa. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

C

**Zadanie 26. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021   |                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne               | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                                                  |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>10.1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

A

**Zadanie 27. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021   |                                                                                                                      |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne               | Wymaganie szczegółowe                                                                                                |
| III. Modelowanie matematyczne. | Zdający:<br>10.2) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

D

**Zadanie 28. (0–1)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021                       |                                                          |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                   | Wymaganie szczegółowe                                    |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>G9.3) wyznacza [...] medianę zestawu danych. |

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

A

## ZADANIA OTWARTE

Uwaga: Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

### Zadanie 29. (0–2)

| Wymagania egzaminacyjne 2021                       |                                                                        |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                   | Wymaganie szczegółowe                                                  |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>3.5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą. |

### Zasady oceniania

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

**Pierwszy etap** to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego  $2x^2 + 2x - 24$ .

**Drugi etap** to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej  $2x^2 + 2x - 24 > 0$ .

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego:  $x_1 = -4$  oraz  $x_2 = 3$  i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - odczyta z wykresu funkcji  $f(x) = 2x^2 + 2x - 24$  i zapisze miejsca zerowe i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

ALBO

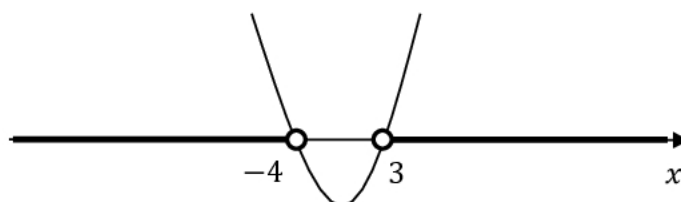
- realizując pierwszy etap rozwiązania zadania, popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności:  $(-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$  lub  $x \in (-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$

ALBO

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik  $\Delta$  jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci  $(-4, -\infty) \cup (3, +\infty)$ , to przyznajemy **2 punkty**.

**Przykładowe pełne rozwiązanie****Pierwszy etap rozwiązania**

Zapisujemy nierówność w postaci  $2x^2 + 2x - 24 > 0$  i obliczamy pierwiastki trójmianu  $2x^2 + 2x - 24$ .

Obliczamy wyróżnik tego trójmianu:  $\Delta = 196$  i stąd  $x_1 = -4$  oraz  $x_2 = 3$ .

ALBO

Stosujemy wzory Viète'a:

$x_1 \cdot x_2 = -12$  oraz  $x_1 + x_2 = -1$ , stąd  $x_1 = -4$  oraz  $x_2 = 3$ .

ALBO

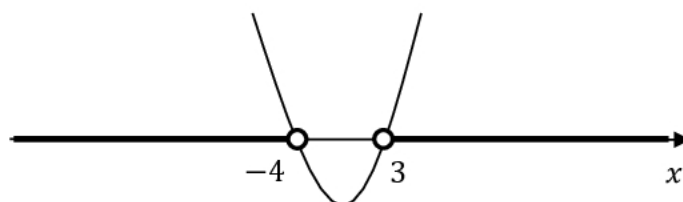
Podajemy je bezpośrednio, zapisując pierwiastki trójmianu:  $x_1 = -4$  oraz  $x_2 = 3$ .

ALBO

Sporządzamy wykres funkcji  $f(x) = 2x^2 + 2x - 24$ , zaznaczamy miejsca zerowe na wykresie i podpisujemy  $x_1 = -4$  oraz  $x_2 = 3$ .

**Drugi etap rozwiązania**

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $(-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$  lub  $x \in (-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$  lub



**Zadanie 30. (0–2)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021                       |                                                                                                              |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                                   | Wymaganie szczegółowe                                                                                        |
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | Zdający:<br>3.7) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych [...]. |

**Zasady oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy poprawnie przekształci równanie do równania kwadratowego i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
gdy obliczy pierwiastki równania:  $x_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $x_2 = 1$ .

**Uwaga:**

Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy przekształcaniu równania, otrzyma równanie kwadratowe i poprawnie je rozwiąże, to otrzymuje **1 punkt**.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Równanie ma sens liczbowy dla  $x \neq \frac{2}{3}$ .

Przekształcamy równanie:

$$\frac{6x-1}{3x-2} = 3x+2$$

$$6x-1 = (3x-2)(3x+2)$$

$$6x-1 = 9x^2-4$$

$$-9x^2+6x+3=0 \quad /: (-3)$$

$$3x^2-2x-1=0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego  $3x^2-2x-1$ :  $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$

i stąd  $x_1 = -\frac{1}{3}$  oraz  $x_2 = 1$ .

Otrzymane pierwiastki są różne od liczby  $\frac{2}{3}$ , więc są rozwiązaniami danego równania.

**Zadanie 31. (0–2)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021   |                                                           |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne               | Wymaganie szczegółowe                                     |
| V. Rozumowanie i argumentacja. | Zdający:<br>7.2) korzysta z własności stycznej do okręgu. |

**Zasady oceniania**

dla sposobów 1. oraz 2.

**Zdający otrzymuje** ..... **1 p.**  
gdy:

- zapisze, że  $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta AOC} + P_{\Delta ABO}$

ALBO

- zapisze związek pomiędzy  $a$ ,  $b$  i  $r$ , który wynika z proporcjonalności odpowiednich boków trójkątów podobnych  $DOC$  i  $ABC$  (lub  $DOC$  i  $EBO$ , lub  $EBO$  i  $ABC$ ), np.:

$$\frac{a-r}{r} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a-r}{r} = \frac{r}{b-r}, \quad \frac{r}{b-r} = \frac{a}{b}$$

**Zdający otrzymuje** ..... **2 p.**gdy wykaże, że  $r = \frac{a \cdot b}{a+b}$ .**Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób 1.

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.

Pole trójkąta  $ABC$  jest sumą pól trójkątów  $ABO$  i  $AOC$ .Promień okręgu poprowadzony z punktu  $O$  do punktu styczności okręgu z odcinkiem  $AB$  jest prostopadły do tego odcinka, więc  $P_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r$ . Podobnie $P_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r$ . Zatem

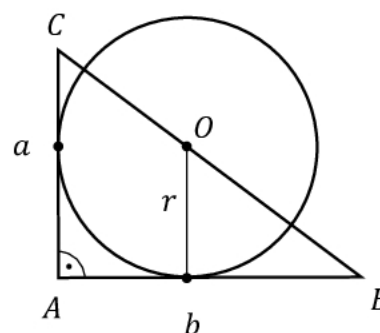
$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ABO} + P_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r + \frac{1}{2} \cdot a \cdot r = \frac{1}{2} (a+b) \cdot r$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} (a+b) \cdot r$$

$$r = \frac{a \cdot b}{a+b}$$

To należało wykazać.





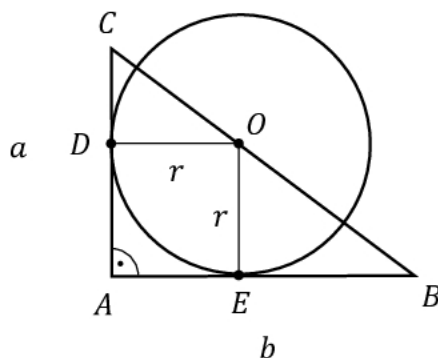
Sposób 2.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$A, B, C$  – wierzchołki trójkąta,

$D$  – punkt styczności przyprostokątnej  $AC$  z okręgiem,

$E$  – punkt styczności przyprostokątnej  $AB$  z okręgiem. (Zobacz rysunek).



Ponieważ odcinek  $OD$  jest prostopadły do odcinka  $AC$  oraz  $|\angle DCO| = |\angle ACB|$ , więc trójkąty  $DCO$  i  $ABC$  są podobne (na podstawie cechy  $kkk$  podobieństwa trójkątów). Stąd

$$\frac{|DC|}{|DO|} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

Odcinek  $OE$  jest prostopadły do  $AB$ , więc  $|DC| = |AC| - |OE| = a - r$ . Zatem

$$\frac{a - r}{r} = \frac{a}{b}$$

$$(a - r) \cdot b = a \cdot r$$

$$ab - rb = ar$$

$$ab = rb + ra$$

$$ab = (a + b)r$$

$$r = \frac{ab}{a + b}$$

To należało wykazać.

**Zadanie 32. (0–2)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021      |                                                                                       |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                  | Wymaganie szczegółowe                                                                 |
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | Zdający:<br>6.3) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi [...]. |

**Zasady oceniania**

**Zdający otrzymuje** ..... **1 p.**

gdy podniesie obie strony równości  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$  do kwadratu i otrzyma

$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{49}{25}$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje** ..... **2 p.**

gdy obliczy wartość wyrażenia  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25}$ .

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Podnosimy obie strony równości  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$  do kwadratu i otrzymujemy:

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{49}{25}$$

Korzystamy z zależności  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  i otrzymujemy  $1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{49}{25}$ , stąd

po przekształceniu mamy:  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{49}{25} - 1 = \frac{24}{25}$ .

### Zadanie 33. (0–2)

| Wymagania egzaminacyjne 2021      |                                                                   |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne                  | Wymaganie szczegółowe                                             |
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | Zdający:<br>G10.9) oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów. |

#### Zasady oceniania

**Zdający otrzymuje .....1 p.**  
gdy:

- zastosuje twierdzenie Pitagorasa i zapisze równość prowadzącą do obliczenia wysokości trójkąta równoramiennego  $BCD$  opuszczonej na podstawę tego trójkąta, np.:  $h^2 = 13^2 - 5^2$

ALBO

- obliczy ze wzoru Herona pole trójkąta  $BCD$

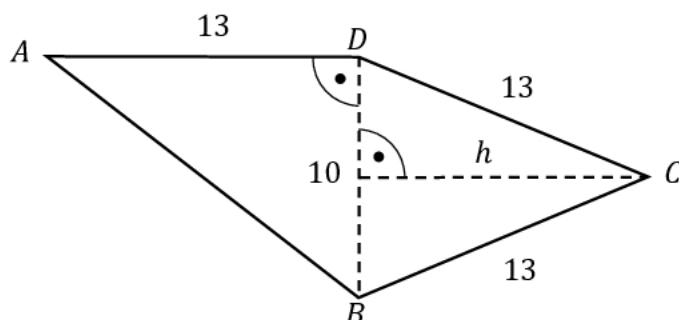
ALBO

- obliczy pole trójkąta  $ABD$ .

**Zdający otrzymuje .....2 p.**  
gdy zapisze, że pole czworokąta  $ABCD$  jest równe 125.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekątna  $BD$  dzieli czworokąt  $ABCD$  na trójkąt prostokątny  $ABD$  oraz trójkąt równoramienny  $BCD$  (zobacz rysunek).



Pole trójkąta prostokątnego  $ABD$  jest równe 65. Obliczamy wysokość  $h$  trójkąta równoramiennego  $BCD$  poprowadzoną z wierzchołka  $C$ . Stosujemy twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy  $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ .

Pole trójkąta  $BCD$  jest równe  $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$ . Pole czworokąta  $ABCD$  jest sumą pól obu trójkątów:  $P_{ABCD} = 60 + 65 = 125$ .

**Uwaga:**

Pole trójkąta  $BCD$  można obliczyć ze wzoru Herona:

$$P_{BCD} = \sqrt{18 \cdot (18 - 10) \cdot (18 - 13) \cdot (18 - 13)} = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

**Zadanie 34. (0–2)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021   |                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne               | Wymaganie szczegółowe                                                                                                                                                     |
| V. Rozumowanie i argumentacja. | Zdający:<br>4.10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje). |

**Zasady oceniania**

**Zdający otrzymuje** ..... **1 p.**

gdy zapisze, że  $f(x) > 0$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ .

**Zdający otrzymuje** ..... **2 p.**

gdy wykaże, że  $1 + c > b$ .

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Funkcja kwadratowa  $f(x) = x^2 + bx + c$  nie ma miejsc zerowych, więc  $f(x) > 0$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . W szczególności  $f(-1) = 1 - b + c > 0$ , czyli  $1 + c > b$ .

To należało wykazać.

**Zadanie 35. (0–5)**

| Wymagania egzaminacyjne 2021   |                                                                                                                                                                                                                                                             |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Wymaganie ogólne               | Wymagania szczegółowe                                                                                                                                                                                                                                       |
| III. Modelowanie matematyczne. | <p>Zdający:</p> <p>5.3) stosuje wzory na <math>n</math>-ty wyraz i sumę <math>n</math> początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;</p> <p>5.4) stosuje wzory na <math>n</math>-ty wyraz i sumę <math>n</math> początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.</p> |

**Zasady oceniania**

dla sposobów 1 oraz 2.

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy:

- wykorzysta wzór na sumę  $S_5$  i zapisze równanie z niewiadomymi  $a_1$  oraz  $r$ :  

$$\frac{(a_1 + a_1 + 4r) \cdot 5}{2} = 10$$

ALBO

- wykorzysta wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego i zapisze

$$a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r + a_1 + 3r + a_1 + 4r = 10$$

ALBO

- uzależni  $a_3, a_5, a_{13}$  od  $a_1$  oraz  $r$  i zapisze równość wynikającą z własności ciągu geometrycznego:  $(a_1 + 4r)^2 = (a_1 + 2r)(a_1 + 12r)$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy:

- obliczy trzeci wyraz ciągu arytmetycznego  $a_3$ :  $a_3 = a_1 + 2r = 2$

ALBO

- zapisze układu równań z niewiadomymi  $a_1$  oraz  $r$ , np.:

$$\begin{cases} \frac{(2a_1 + 4r) \cdot 5}{2} = 10 \\ (a_1 + 4r)^2 = (a_1 + 2r)(a_1 + 12r) \end{cases}$$

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą ( $r$  lub  $a_1$ ), np.:

$$(2 + 2r)^2 = 2 \cdot (2 + 10r) \text{ lub } (a_1)^2 + 2a_1 - 8 = 0 \text{ lub } r^2 - 3r = 0.$$

**Zdający otrzymuje ..... 4 p.**  
gdy:

- rozwiąże równanie  $r^2 - 3r = 0$ :  $r = 0$  oraz  $r = 3$

ALBO

- rozwiąże równanie  $(a_1)^2 + 2a_1 - 8 = 0$  :  $a_1 = -4$  lub  $a_1 = 2$

ALBO

- rozwiąże układ równań z błędem rachunkowym (na przykład błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

**Zdający otrzymuje ..... 5 p.**

gdy wyznaczy wzór na  $n$ -ty wyraz podanego ciągu  $a_n$ :  $a_n = -4 + (n - 1) \cdot 3$ ,  
 $a_n = 3n - 7$ .

### Uwaga:

Jeśli zdający nie odrzuci rozwiązania  $r = 0$ , to za całe rozwiązanie otrzymuje **4 punkty**.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób 1.

Z warunków zadania wiemy, że  $S_5 = 10$ , czyli  $\frac{(a_1 + a_1 + 4r) \cdot 5}{2} = 10$ .

Po przekształceniu ostatniej zależności otrzymujemy:  $a_1 + 2r = 2 = a_3$ .

Z warunków zadania wiemy, że wyrazy  $a_3 = 2$ ,  $a_5 = a_3 + 2r$ ,  $a_{13} = a_3 + 10r$  tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Stąd mamy  $(2 + 2r)^2 = 2 \cdot (2 + 10r)$ . Otrzymujemy równanie kwadratowe  $r^2 - 3r = 0$ , którego rozwiązaniami są liczby  $r = 0$  oraz  $r = 3$ . Odrzucamy odpowiedź  $r = 0$ , ponieważ ciąg arytmetyczny jest rosnący.

Dla  $r = 3$  obliczamy  $a_1$ :  $a_1 = a_3 - 2r = 2 - 6 = -4$ .

Wyznaczamy wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = -4 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 7.$$

#### Sposób 2.

Z warunków zadania wiemy, że  $S_5 = 10$ , czyli  $\frac{(a_1 + a_1 + 4r) \cdot 5}{2} = 10$ .

Z własności ciągu geometrycznego  $(a_5)^2 = a_3 \cdot a_{13}$ , co zapisujemy w postaci:

$$(a_1 + 4r)^2 = (a_1 + 2r)(a_1 + 12r).$$

Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} \frac{(2a_1 + 4r) \cdot 5}{2} = 10 \\ (a_1 + 4r)^2 = (a_1 + 2r)(a_1 + 12r) \end{cases}$$

z którego obliczamy wartość pierwszego wyrazu ciągu i różnicę ciągu, np.:

$$\begin{cases} r = 1 - \frac{1}{2}a_1 \\ (a_1 + 4r)^2 = (a_1 + 2r)(a_1 + 12r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 1 - \frac{1}{2}a_1 \\ (4 - a_1)^2 = 2 \cdot (12 - 5a_1) \end{cases}$$

$$16 - 8a_1 + (a_1)^2 = 24 - 10a_1$$

$$(a_1)^2 + 2a_1 - 8 = 0$$

$$\Delta = 4 + 32 = 36$$

$$a_1 = -4 \text{ lub } a_1 = 2$$

Dla  $a_1 = -4$  otrzymujemy  $r = 3$ , natomiast dla  $a_1 = 2$  otrzymujemy  $r = 0$ .

Ciąg arytmetyczny jest rosnący, więc  $r = 0$  odrzucamy.

Wyznaczamy wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = -4 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 7.$$